A MATEMÁTICA DO ÍNDICE DE DESENVOLVIMENTO HUMANO-IDH: EVIDENCIANDO A BASE DE CÁLCULO DA MÉTRICA ESTATÍSTCA PARA MEDIR O BEM-ESTAR DE VIDAS HUMANAS.

Alcides Domingos Cambundo[1]

RESUMO

Sendo nos dias actuais uma importante fonte de informação para definição de políticas públicas e investimentos entre as nações, compete ao índice de desenvolvimento humano (IDH) não apenas representar a actual conjuntura económico-social de um país, mas também considerar os esforços empregues na busca de melhores resultados. Em conformidade a isso, o presente artigo tem como objectivo, apresentar os fundamentos Matemáticos- estatísticos que estão na base do desenho e cálculo do IDH, isto é, a formulação analítica, a combinação matemática dos indicadores e a fórmula final empregue para congregar e calcular o índice como uma métrica sólida para medir o índice de desenvolvimento humano. Como um novo elemento, o conhecimento dos fundamentos matemáticos do IDH, pode produzir uma melhor visão deste tão importante indicador social do bem-estar humano, apesar das críticas de diversos especialistas, o IDH é muito usado para avaliação e comparação entre países ao ponto de permitir uma adaptação e contextualização na mensuração de desenvolvimento humano entre distintas localidades geográficas de um mesmo território, consequentemente, novos meios de se alcançar um desenvolvimento social, económico e reduzir as assimetrias regionais, o que causa uma mudança considerável no fenómeno sobre êxodo rural que é característico nos países em via de desenvolvimento.

Palavras-chave: IDH; Matemática, Indicador

[1]. Pós-graduado Lato-Sensu em Modelagem estatística; Licenciado em Ciências Matemáticas; Analista de dados. Consultor em Estatística pela BigSoft Angola.
Email:alcidesdomingos@live.com.pt

1. INTRODUÇÃO

Nos princípios da década de 90 foi lançado pela Organização das Nações Unidas (ONU), o Índice de Desenvolvimento Humano (IDH), que se propôs em verificar o nível de desenvolvimento de um país utilizando-se indicadores de desempenho. O IDH, assim, passou a ser o mais conhecido cálculo do desenvolvimento humano (Torres, Ferreira e Dini, 2003). A partir dele, o debate referente aos aspectos económico s e sociais passou a ser mais direcionado à qualidade de vida e às condições essenciais da sociedade, opondo-se às antigas mensurações em que a esfera econômica do indivíduo sobressaía-se frente aos aspectos sociais inerentes a ele.

Com o aparecimento do IDH, o carácter social passou a ter peso fundamental na definição dessa métrica de desenvolvimento humano. Encomendado pelo Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento (PNUD), o IDH combina três componentes básicos do desenvolvimento humano: a expectativa de vida, a educação e a renda. A partir dele, e observando as características de cada país com base em seus aspectos históricos, culturais, económicos e sociais, surge a seguinte questão:

As informações fornecidas pelo IDH conseguem exprimir claramente os esforços públicos e privados na determinação dos componentes considerados básicos ao desenvolvimento de uma nação? Sendo uma fonte de informação não apenas para os governantes verificarem as actuais circunstâncias de seu país ou um retrato social exclusivo da ONU, o IDH é um guia para todas as pessoas e organismos públicos e privados na definição de políticas públicas e investimentos entre as nações.

Portanto, compete a ele, não somente definir a actual conjuntura económico-social de uma região, mas também considerar os esforços envolvidos na busca de melhores resultados. Nesse sentido, os países podem utilizar seus recursos na busca de bons indicadores, mas se deparam com limitações a nível de orçamentos e com a dificuldade de utilizá-los de modo mais racional possível. Portanto, este trabalho se propõe em desenvolver e apresentar os fundamentos da Matemática que estão na base do cálculo do IDH, especificamente as combinações matemáticas para congregar indicadores em uma só expressão analítica e que resulta na medida estatística e, faz um enquadramento da utilidade da média aritmética, média geométrica e aplicações de propriedades logarítmicas na medição de indicadores relacionados com a renda, saúde e educação, elementos básicos do desenvolvimento humano.

Dentro desse contexto, este trabalho não ambiciona mostrar os fundamentos da criação do IDH de ponto de vista Matemático, mas sim evidenciar a compreensão do cálculo Matemático e a sua robustez na mensuração de indicadores do bem-estar.

Além desta introdução, este artigo contém mais quatro secções. Na secção 2 procura-se abordar sobre as referências bibliográficas referentes aos indicadores de desenvolvimento humano e utilidade da Matemática na mensuração de fenómenos sociais. Na secção 3 procura-se aclarar os meios pelos quais se espera atingir o objectivo proposto neste trabalho. A secção 4 apresenta, discute e elucida os resultados obtidos ao longo deste trabalho e, por fim, a secção 5 traz as considerações finais.

2. REVISÃO DA LITERATURA

Partindo do princípio de que as ciências sociais estudam os aspectos sociais e a matemática é o uso da lógica e da formulação de teorias, pode-se admitir que matemática aplicada às ciências sociais seria o estudo dos fenômenos sociais através de observações sistemáticas, com aplicações de modelos matemáticos, experimentos e análises estatísticas para comprovar e justificar comportamentos.

Nesta conformidade, o conceito de estudar o desenvolvimento humano através de uma métrica estatística denominada IDH é impulsionado fortemente pelas aplicações da Matemática, a ideia de desenvolvimento é tão subjectiva quanto a de utilidade. Durante muito tempo, entretanto, a medida mais comum do bem-estar humano agregado foi a renda nacional, usualmente expressa pelo produto interno bruto (PIB) per capita ou pelo produto nacional bruto (PNB) per capita. Ambos, entretanto, sofreram críticas por representarem modos de valoração de bem-estar que somente registam transações monetárias, tratando os recursos naturais como livres e ilimitados, ignorando a liberdade e os direitos humanos, assim como a distribuição de renda da sociedade, entre outros motivos (Stanton, 2007).
Diante desta dificuldade de a renda nacional retratar o nível de bem-estar de uma nação, muitos órgãos de pesquisa e agências internacionais de desenvolvimento começaram a dar atenção a medidas que, mediante a combinação de indicadores, poderiam representar o nível de progresso social de um país. O grande questionamento passava a ser, como destacado por Hicks e Streeten (1979), a escolha das variáveis e a forma de combiná-las. Conforme o estudo de Stanton (2007), vários índices foram desenvolvidos a partir da década de 1960 buscando encontrar maneiras mais efectivas de representar o nível de desenvolvimento humano das sociedades.

Entre tais indicadores estão o Índice do Nível de Vida (INV), desenvolvido pela United Nations Research Institute for Social Development (UNRISD) em 1966, que levava em consideração necessidades físicas e culturais, além da própria renda; o Índice de Desenvolvimento, criado pela mesma UNRISD em 1972; e o índice físico de qualidade de vida (PQLI), elaborado pelo Overseas Development Council (ODC) em 1979, com o objectivo de mensurar um conjunto mínimo de necessidades humanas a serem atendidas pelas pessoas mais pobres do mundo, combinando dados de mortalidade infantil, expectativa de vida ao nascer e nível de alfabetização, transformando cada indicador em um índice para, em seguida, obter a média destes três elementos.

Apesar de o PQLI já revelar algumas similaridades com o actual IDH, foram necessários mais dez anos para projectar uma ideia de desenvolvimento apoiado em uma nova conceituação de bem-estar, desviando o foco da economia e da contabilidade da renda nacional para as políticas centradas nas pessoas. Guiando-se pela ideia de incluir escolhas económicas e sociais para formular um índice composto e flexível a melhorias graduais, Haq (1995) resolveu focar em três componentes essenciais: i) vida longa e saudável (longevidade); ii) conhecimento; e iii) acesso aos recursos necessários para manter um nível decente de vida.

A primeira medida corresponde à expectativa de vida ao nascer e leva em consideração, neste caso, valores associados à mortalidade; o segundo componente faz referência à média dos anos de estudo da população adulta e à expectativa de escolarização; e a terceira dimensão equivale ao logaritmo5 do produto per capita definido em dólares, por sua facilidade de mensuração (Anand e Sen, 1994).

Ao longo dos anos o cálculo do IDH sofreu diversas alterações visando mantê-lo actualizado e alinhado ao objectivo de retratar mais adequadamente o nível de bem-estar das nações.

O índice actual, actualizado em 2010, introduziu mudanças importantes, entre as quais: a alteração dos indicadores da componente educação e de seus pesos; a introdução de limites mínimos fixos e máximos observados e a utilização da média geométrica para agregar os indicadores, o que faz com que uma baixa performance em quaisquer das dimensões reflita mais diretamente no IDH, além de não permitir a substituição perfeita entre os componentes, como ocorria anteriormente com a média simples. Esse método revela quão equilibrado é o desempenho de um país entre as três dimensões, reconhecendo que todas elas são importantes e evitando que valores elevados em um atributo compensem valores baixos em outro (PNUD, 2010).

Desde a construção do IDH, os estudos daí decorrentes podem ser classificados em três grupos: o primeiro se refere àqueles que buscam entender e justificar a construção metodológica do índice; o segundo explora o papel do IDH na explicação de questões específicas relacionadas ao desenvolvimento humano em diversas regiões do mundo; e, por fim, o terceiro grupo busca aumentar a aplicabilidade do IDH, mediante incorporação de outras dimensões na estrutura de cálculo (Arcelus, Sharma e Srinivasan, 2003).

Dando ênfase que nestes grupos, este trabalho se revê no primeiro grupo, ou seja, o de buscar entender e justificar a construção metodológica do índice. O último grupo de estudos reconhece o avanço proporcionado pela utilização do IDH como indicador de desenvolvimento das sociedades, apesar de fundamentar críticas ao seu uso para tal fim.

Neste sentido, Mahlberg e Obersteiner (2001) identificaram duas correntes de críticas ao IDH, ainda relacionadas com aquelas feitas à renda nacional como forma de valorar o bem-estar. A primeira delas questiona a escolha dos indicadores que compõem o índice, enquanto o segundo grupo de pesquisadores afirma que o IDH falha em medir a real condição de vida de uma sociedade, uma vez que importantes aspectos do desenvolvimento não são levados em consideração, tais como a situação ambiental, a distribuição de renda e a estabilidade política.

Em uma dessas críticas, Hicks (1997) propõe uma forma alternativa que incorpora as desigualdades de distribuição de renda, de educação e de longevidade na estrutura de cálculo do IDH. Seguindo a ideia de ampliar a aplicabilidade do IDH mediante a incorporação de outras dimensões relacionadas ao desenvolvimento humano, associa-se como possível parâmetro a eficiência dos países na geração dos produtos (componentes) do IDH.

Além disso, os recursos economizados podem ser utilizados para melhorar a qualidade dos serviços já oferecidos, qualidade esta que não é levada em consideração no cômputo do IDH.

Em todo caso, o que se realça ao longo desta revisão da literatura em torno do IDH é a presença da Matemática através de suas ferramentas ou funções no impulso de mensuração de qualquer outra medida.

Uma das funções muito eficiente na medição do IDH é a média geométrica, a literatura clássica da matemática, define a média geométrica de um conjunto de números positivos como o produto de todos os membros do conjunto elevado ao inverso do número de membros. Indica a tendência central ou o valor típico de um conjunto de números usando o produto dos seus valores (diferente da média aritmética, que usa a soma dos valores).

A média geométrica é definida como n-ésima raiz (onde n é a quantidade de termos) da multiplicação dos termos. Por exemplo, a média geométrica de dois números, neste caso 2 e 8, é apenas a raiz quadrada do produto entre 2 e 8; isto é: $\sqrt{2 \cdot 8}$ =4.

A média geométrica é frequentemente utilizada quando comparamos diferentes itens – encontrando uma única "figura representativa" para esses itens – quando cada um desses itens possuem múltiplas propriedades que possuem diferentes escalas numéricas. Por exemplo, a média geométrica pode nos dar uma "média" significativa para comparar dois países que estão sendo classificadas numa escala de 0 a 5 para suas sustentabilidades económico-social e sendo classificadas de 0 a 100 para suas viabilidades financeiras. Se a média aritmética fosse usada em vez da média geométrica, a viabilidade financeira pesaria mais pois seu alcance numérico é grande, logo uma pequena mudança percentual na classificação financeira (por exemplo: uma mudança de 80 para 90) faria uma grande diferença na média aritmética do que uma grande diferença percentual na classificação da sustentabilidade económico-social (por exemplo uma mudança de 2 para 5 na escala).

O uso da média geométrica normaliza os alcances que podem ser alcançados, então nenhum alcance dominará os pesos, e uma dada mudança percentual em qualquer das propriedades possui o mesmo efeito na média geométrica.

Concluímos então que uma mudança de 20% na sustentabilidade económico-social (de 4 para 4,8 na classificação) possuirá o mesmo efeito na média geométrica que uma mudança de 20% na viabilidade financeira (de 60 para 72 na classificação).

De acordo a literatura, o IDH segue uma classificação qualitativa dependentemente dos valores a serem observados, neste caso o IDH e suas dimensões variam de 0 a 1, de tal forma que, quanto mais próximo de 1, maior é o desenvolvimento humano da unidade territorial em análise. Assim sendo, tem-se:

$[0 - 0{,}499]$- IDH baixo;

$[0{,}500 - 0{,}799]$-IDH médio;

$[0{,}800 - 0{,}899]$-IDH Alto;

$[0{,}900 - 1{,}00]$-IDH muito Alto.

3. METODOLOGIA

3.1. As dimensões presentes no IDH

Em função do que a literatura estabeleceu para a construção do IDH, é imperioso e importante apresentar os indicadores para cada dimensão no sentido de se ter melhor precisão durante a construção e combinação das operações matemáticas na dimensão e por variáveis.

i. Dimensão educação

A dimensão educação comporta consigo alguns indicadores flexíveis a substituibilidade, mas, todas importantes em termo de impacto, nomeadamente: Média dos anos de escolaridade vs o número esperado desses anos; taxa de alfabetização e de frequência.

Para esta dimensão, os indicadores taxa de alfabetização e de frequência escolar são calculados mediante as expressões analíticas abaixo:

$$Ta = \frac{População\ de\ 15\ ou\ mais\ anos\ que\ sabe\ ler\ e\ escrever}{Total\ da\ população\ com\ 15\ ou\ mais\ anos} \times 100$$

$$Tf = \frac{População\ de\ 6 - 24\ anos\ a\ frequentar\ a\ escola}{Total\ da\ população\ com\ 6 - 24\ anos} \times 100$$

Onde:

$Ta - Taxa\ de\ alfabetização;$

$Tf - Taxa\ de\ frequência.$

Neste caso, considera-se a taxa de matrícula efectiva, ou seja, o número de matriculados que efectivamente estejam a estudar, isso é equivalente a taxa de frequência escolar, no caso a frequência líquida para cada um dos respectivos ciclos de ensino ou pode se considerar a frequência acumulada de todos os ciclos de ensino.

ii. Dimensão saúde

A dimensão saúde contempla o indicador da expectativa ou esperança de vida dos habitantes, sendo um reflexo da qualidade de saneamento básico e serviços de saúde pública. Em geral a esperança de vida é calculado pelas agências nacionais de pesquisas demográficas ou Institutos de estatística, já que ela é uma média obtida depois de distribuir o total de anos vividos a partir de certa idade entre a população inicial dessa idade. A expressão analítica usada é : $E = \frac{T_x}{l_x}$

Onde:

E- Esperança de vida;

T_x- É o número total de anos vividos desde a idade x;

l_x- É o número de sobreviventes na idade exacta x.

iii. Dimensão renda

A dimensão renda é explicado através do indicador macro de contas nacionais, produto interno bruto (PIB), mas no caso o PIB per capita, ele é calculado através do quociente entre o PIB e a população total do ano de referência, ou seja,

$$PIB_{pc} = \frac{Produto\ interno\ bruto}{Total\ da\ população}$$

onde PIB_{pc} é o PIB per capita.

Até o momento apresentou-se as dimensões e respectivos indicadores que constituem o índice de desenvolvimento humano (IDH).

3.2. A construção dos sub-índices

A construção do índice de desenvolvimento humano é precedida pela construção de sub-índices em cada uma das dimensões apresentadas na subsecção 3.1, neste caso os sub-índices IDH_E, IDH_R e IDH_S, designadamente índices de desenvolvimento humano da educação, renda e saúde respectivamente.

Para calcular estes sub-índices utiliza-se um procedimento de normalização para que esses índices variem de 0 a 1, no entanto esta técnica de normalização matemática será abordada na secção posterior.

3.3. Os meios para ilustrar a matemática da métrica IDH

Esta subsecção se propõe em indicar os meios que serão empregues para ilustrar a matemática do IDH, devendo também abordar os mecanismos matemáticos que permitirão fazer um melhor enquadramento das combinações dos indicadores estatísticos mediante a contextualização analítica-matemática de teoremas, axiomas, fórmulas, demonstrações e definições julgados convenientes para as deduções das ferramentas do IDH.

a) **Definições**

As definições e conceitos são de grande utilidade na contextualização da aplicação de uma ferramenta ou função matemática em busca de alguma solução, sendo estas importantes para permitir o real enquadramento no desvendar de pormenores matemáticos congregados em um único indicador.

b) **Teoremas e axiomas**

A par das definições e conceitos, estão os teoremas e axiomas matemáticos que norteiam o estabelecimento de uma premissa para construção de um modelo estatístico, tais como teorema do limite central, teoremas da lei dos grandes números, etc., através destes teoremas é cômodo e confortável combinar várias variáveis em um só indicador e sem perder a generalidade matemática que os relaciona na dimensão em análise.

c) **Fórmulas e demonstrações Matemáticas**

Para evidenciar a matemática do IDH será necessário e imprescindível recorrer-se a utilização de fórmulas que estão por trás da métrica, devendo-se então em certos casos fazer-se a demonstração das referidas expressões analíticas, sobretudo na utilização das fórmulas de cálculo dos sub-índices, na combinação linear destes para a constituição da média aritmética, geométrica e a normalização do indicador. Neste aspectos, encurtar-se-á alguns procedimentos matemáticos julgados ou tidos como básicos na óptica do autor do artigo, a fim de racionalizar os passos que não são puramente de uma aula de técnicas de demonstração matemática, esperando que caso o leitor tenha alguma dúvida na compreensão de um dos pormenores encobertos, que procure aperfeiçoa-lo em uma outra literatura relacionado ao tópico de Matemática em causa.

É importante dar nota que, as demonstrações estabelecem um papel fundamental na matemática, é por meio delas que se pode verificar a veracidade de teoremas. Neste trabalho, sempre que necessário e julgar-se relevante apresenta-se a demonstração de qualquer função matemática que fundamenta a base de cálculo do IDH mediante uma das quatro importantes técnicas de demonstração, nomeadamente demonstração directa, indirecta, por absurdo e por indução.

Em matemática, uma prova é uma demonstração de que, dados certos axiomas, algum enunciado de interesse é necessariamente verdadeiro. Utiliza como base premissas intrínsecas a um modelo conceitual e um silogismo que, a partir de uma série de operações, chega ao resultado. Costuma-se marcar o final de uma prova ou demonstração com a abreviação c. q. d. (como queríamos demonstrar).

Além da lógica, as demonstrações usualmente incluem alguma quantidade de linguagem natural, o que pode levar a ambiguidade ou dificuldade de entendimento, tendo em vista o carácter deste tipo de linguagem ser mais dependente da interpretação humana. Assim, a forma como a grande maioria das demonstrações na matemática é ensinada pode ser considerada como aplicações da lógica informal, mas uma afirmação só deixa de ser considerada uma conjectura após ter uma demonstração escrita usando lógica formal nos trechos onde pode haver ambiguidades. No contexto da teoria da prova, em que as provas puramente formais são consideradas.

4. EVIDENCIANDO A MATEMÁTICA DO IDH

4.1. As funções matemáticas nos sub-índices do IDH

A norma

Consideremos o conceito matemático “norma”, uma norma consiste em uma função que a cada vector de um espaço vectorial associa um número real não-negativo. O conceito de norma está intuitivamente relacionado à noção geométrica de comprimento. Dado um espaço vectorial X sobre o corpo K dos números reais ou complexos, uma função $\| \, . \|: X \to R^+$ é chamada de norma se, quaisquer $x, y \in X$ e todo $\alpha \in K$:

- $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$. Se esta condição não se cumpre, a função será no máximo uma semi-norma;
- $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular)

Se o espaço vectorial X tem uma norma, ele passa a ser chamado de espaço normado, e denotado por $(X, \| \, . \|)$.

De acordo o conceito de norma de ponto de vista matemático expresso acima, pode-se concluir que toda a norma induz de forma natural uma métrica d em X cujos valores são dados por: $d(x, y) = \|x - y\|$.

Essa expressão matemática permite que o IDH seja abordado como uma métrica, ou seja, uma medida estatística que visa mensurar o impacto de um conjunto de programas e políticas públicas de um país.

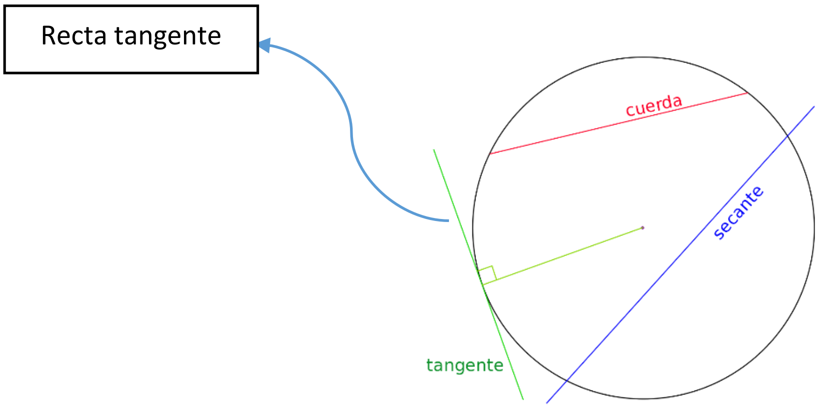
A recta tangente

Um outro meio a ser empregue para dedução da matemática do IDH é o conceito geométrico de “recta tangente”. A recta tangente de uma curva em um ponto *P* pertencente a ela, é uma recta definida a partir de um outro ponto *Q* pertencente à curva, muito próximo do ponto *P*.

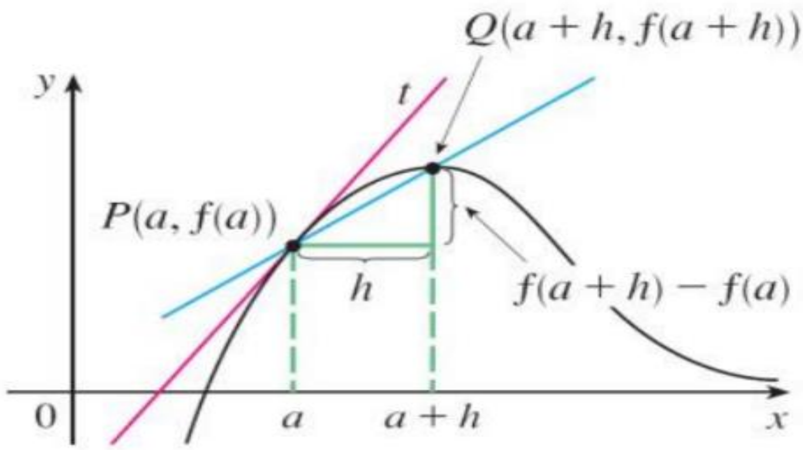
Ao traçarmos uma recta r que passa pelos dois pontos, é a posição para onde a recta r tende, à medida que *Q* se aproxima de *P*, "caminhando" sobre a curva.

Em linhas gerais, uma recta se torna tangente de uma curva y = f(x) no ponto x = c, se esta passar pelo par ordenado (c, f(c)) e ter inclinação f'(c), na qual f' é derivada de f.

A recta tangente a um ponto de uma curva diferenciável também pode ser pensada como o gráfico da função afim que melhor aproxima a função original no ponto dado



A recta tangente a y = f(x) em (a, f(a)) é a recta que passa em (a, f(a)), cuja inclinação é igual a f '(a), a derivada de f em a.



$$m_{PQ} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Quando x → a, h → 0 (pois h = x – a). Assim a expressão para a inclinação da recta tangente fica: $m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ essa expressão permite encontrar o declive, ou seja, $y - y_P = m(x - x_P) => \ m = \frac{y-y_P}{x-x_P}$ (1)

A expressão (1) é a equação da recta tangente tendo em consideração que passa no ponto P, ou seja, é a equação canónica da recta.

Contextualizando, aqui o m será o indicador a observar em cada dimensão em função do valor ou limiar estabelecido, permitindo assim calcular os sub-índices.

Combinação da norma com a equação da recta tangente

Associando o conceito de norma ao da recta tangente, será a introdução do conceito de normalização do indicador ou sub-índices, deste modo temos:

Suponha que um indicador x varia de x_{min} (valor mínimo) até $x_{máx}$ (valor máximo).

A normalização é feita pela transformação: $x_{norm} = \frac{x - x_{min}\,,}{x_{máx} - x_{min}}$ (2), assumindo que $x \in X$ e que X é um espaço vectorial, neste caso X passa a ser chamado de espaço normado, e denotado por $(X, \|\,.\,\|)$, onde X é o conjunto de todos os valores possíveis do indicador x, logo, $\|x\| = 0 \leftrightarrow x=0$ e como $x_{min} < x \leq \ x_{máx}$ para cada limiar estabelecido nos sub-índices, tem-se que $x > 0$, daqui: conclui-se que $\frac{x - x_{min}\,,}{x_{máx} - x_{min}} \leq 1$.

Assim sendo, a equação (2) dá lugar a fórmula de cálculo do sub-índice IDH_S considerando x_{norm}=IDH_S e x a esperança de vida tem-se: $\boldsymbol{IDH_S} = \frac{E-E_{mín}}{E_{máx}-E_{mín}}$

Onde:

$E - Esperança\ de\ vida\ ao\ nascer\ observada;$

$E_{mín} - Esperança\ de\ vida\ mínima;$

$E_{máx} - Esperança\ de\ vida\ máxima$

$IDH_S - Índice\ de\ Desenvolvimento\ Humano\ da\ saúde.$

Geralmente os valores $E_{mín}$ e $E_{máx}$ são fornecidos pelo PNUD e tem sido: 25 e 85 anos respectivamente.

Consideremos agora o indicador x do mesmo espaço normado X e α um escalar de K$\subset R^+$, tal que x é combinação linear do vector x(x_1, x_2) através do escalar α de modo que $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ (3), de sorte que o escalar α_i será considerado como peso ou ponderadores de cada um das componentes do indicador x.

Seja $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, se $\alpha_1 = \frac{2}{3}$ => $\alpha_2 = 1 - \alpha_1 =>\ \alpha_2 = 1 - \frac{2}{3} =>\ \alpha_2 = \frac{1}{3}$, introduzindo os valores de α_1 e α_2 na expressão (3) tem-se: $x = \frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2$ (4).

A equação (4) dá lugar a fórmula de cálculo do sub-índice IDH_E considerando $x_{norm} = x_{norm1} + x_{norm2} = IDH_E$, x_1 a Taxa de alfabetização da população com 15 ou mais anos, x_2 a Taxa de matrícula da população com 6- 24 anos, resultando na expressão $\boldsymbol{IDH_E} = \frac{2}{3}x_{norm1} + \frac{1}{3}x_{norm2}$ ou seja,

$$\boldsymbol{IDH_E} = \frac{2}{3}\left(\frac{TA - TA_{mín}}{TA_{máx} - TA_{mín}}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{TF - TF_{mín}}{TF_{máx} - TF_{mín}}\right)$$

Onde:

$TA - Taxa\ de\ alfabetização\ observada;$

$TA_{mín} - Taxa\ de\ alfabetização\ mínima;$

$TA_{máx} - Taxa\ de\ alfabetização\ máxima;$

$TF - Taxa\ de\ frequência\ observada;$

$TF_{mín} - Taxa\ de\ frequência\ mínima;$

$TF_{máx} - Taxa\ de\ frequência\ máxima;$

$IDH_E - índice\ de\ Desenvolvimento\ Humano\ da\ educação.$

Os valores das taxas de alfabetização e de frequência variam de 0-100 e são calculados mediante as idades de 15 ou mais anos e 6-24 anos respectivamente, dependentemente das idades de frequência dos diferentes níveis ou ciclos de ensino de cada país, no entanto para Angola considera-se a frequência escolar a partir dos 5 anos devido o ensino pré-escolar.

O valor do escalar $\alpha_1 = \frac{2}{3}$ quer dizer que na dimensão educação, a taxa de alfabetização tem um peso igual a $\frac{2}{3}$ e o valor do escalar $\alpha_1 = \frac{1}{3}$ quer dizer que a taxa de matrícula tem um peso igual a $\frac{1}{3}$, evidenciando que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$.

A função do logarítmo

Quando se estuda modelação matemática de fenómenos sociais e financeiros, é imprescindível o uso da função logarítmica através de sua praticidade nas propriedades para com indicadores que assumem valores a partir da classe decenal ou centenas.

Na matemática, o logaritmo de um número é o expoente a que outro valor fixo, a base, deve ser elevado para produzir este número. Por exemplo, o logaritmo de 1 000 na base 10 é 3 porque 10 elevado ao cubo é 1 000 (1 000 = 10^3).

De maneira geral, para quaisquer dois números reais b e x, onde b é positivo e b ≠ 1,

$y = b^x \leftrightarrow x = \log_b y$

O logarítmo da base 10 (b=10) é chamado de logarítmo comum ou decimal e por esse facto tem diversas aplicações na ciência e na engenharia.

A actual noção de logaritmo advém de Leonhard Euler, que o relacionou com a função exponencial no século XVIII.

As escalas logarítmicas permitem reduzir grandezas de elevada amplitude para valores menores. Por exemplo, o decibel é uma unidade logarítmica que indica a proporção de uma quantidade física (geralmente energia ou intensidade) em relação a um nível de referência, isto é, estabelece uma razão entre a quantificação da energia liberada e a amplitude; outro exemplo é o produto interno bruto de um país que de ponto de vista matemático é uma grandeza escalar da classe dos grandes números por congregar em unidades monetárias o rendimento financeiro de um país, com o logarítmo comum ou decimal é possível fazer transformações de modo a obter valores equivalentes mais reduzidos adoptáveis a modelos estatísticos.

Portanto, o PIB é um indicador que pode ser facilmente logaritmizado, já que cumpre com a propriedade fundamental do logarítmo, isso quando PIB é uma função de y, ou seja, $y = PIB, já\ que\ PIB > 0$.

Desta maneira, analogamente associa-se o conceito do logarítmo ao da norma, que se pode estabelecer de seguida.

Suponha que um indicador x varia de x_{min} (valor mínimo) até $x_{máx}$ (valor máximo) e que x é suficientemente grande, então $x_{norm} = \frac{x - xmin}{xmáx - xmin}$, como $x \epsilon X$ e X é um espaço vectorial normado, implica dizer que X pode ser um espaço de resultados de experimentos aleatórios e x_{norm} uma variável aleatória do espaço X, pela lei dos grandes números tem-se que:

$x_1, x_2, x_3, \ldots$ variáveis aleatórias e seja $E(X_i) = \mu$ e $Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$ para cada $\varepsilon > 0$, de acordo a lei fraca dos grandes números, a média $\bar{X}_n$ converge em probabilidade para a média μ, isto é $\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon) = 1 => \ x_{norm} = \frac{x - x_{min}}{x_{máx} - x_{min}} \leq 1$

como $(x - x_{min})$ é um número suficientemente grande de acordo a lei dos grandes números, então para a redução pode-se aplicar o logarítimo decimal para cada diferença, deste modo vem: $x_{norm} = \frac{logx - logx_{min}}{\log x_{máx} - logx_{min}}$ (5)

A equação (5) dá lugar a fórmula de cálculo do sub-índice IDH_R considerando $x_{norm} = \frac{logx - logx_{min}}{\log x_{máx} - logx_{min}} = IDH_R$, resultando em

$$\boldsymbol{IDH_R} = \frac{\log PIB_{PC} - logPIB_{PCmín}}{logPIB_{PCmáx} - logPIB_{PCmín}}$$

Onde:

$PIB_{PC} -$ É $PIB\ per\ capita\ observado$;

$PIB_{PCmín} - PIB\ per\ capita\ mínimo$;

$PIB_{PCmáx} - PIB\ per\ capita\ máximo$;

$IDH_R -$ Í$ndice\ de\ Desenvolvimento\ Humano\ da\ renda.$

Geralmente os valores mínimos e máximos do PIB per capita são fornecidos também pelo PNUD e tem sido usual 100 e 40 000 U$D/Habitante respectivamente.

Até aqui procedeu-se a ilustração e evidenciação dos pressupostos matemáticos para a construção e cálculo dos sub-índices de desenvolvimento humano de acordo as respectivas dimensões.

4.2. A base de cálculo do IDH geral

Uma vez que já se deduziu a matemática dos sub-índices, resta agora fazer o mesmo exercício para ilustrar-se a base de computação do índice geral, ou seja, o IDH como combinação de todos os sub-índices de cada dimensão.

A média aritmética

Sejam $x_1, x_2, x_3, \ldots$ variáveis aleatórias e seja $E(X_i) = \mu \; e \; Var(X_i) = \sigma^2 < \infty$ define-se a média aritmética $\bar{x}_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{n}$, para $i \in N$ e para todo $\varepsilon > 0$ tem-se que $\lim_{n\to\infty} P(|\bar{X}_n - \mu| < \varepsilon)$

Entretanto, como x_i é uma variável aleatória e distribuído normalmente, então a mediana é 0, mas o valor esperado não existe e a média dessas n variáveis tem a mesma distribuição de uma única variável. Isso não tende a 0 à medida que n tende ao infinito.

Para sustentar a introdução da função média, consideremos o seguinte teorema:

Seja X_i uma sequência de variáveis aleatórias independentes tomadas dois a dois, seja essa sequência de variância finita e uniformemente limitada tem-se a lei fraca dos grandes números. Também pode-se entender de ponto de vista algébrico como existe um $c \in R$, tal que $Var(X_i) \leq c$.

Demonstração:

Uma soma de uma sequência de variáveis aleatórias pode ser escrita como:

$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ A independência de X_i implica $Var(S_n) = \sum_{i=1}^{n} var(X_i) \leq nc$, pela desigualdade de Chebyshev, tem-se que $P[|S_n - E(S_n)| \geq \varepsilon n] \leq \frac{Var(S_n)}{\varepsilon^2 n^2} \leq \frac{c}{\varepsilon^2 n^2} \to 0, quando \; n \to \infty$, logo, obtém-se: $\frac{S_n - E(S_n)}{n} \to 0$, lembrando-se que está convergindo para 0 com a probabilidade (c.q.d).

Nesta conformidade, como pretende-se calcular o IDH geral, este deve ser resultado da média aritmética dos sub-índices, já que considera-se que cada x_i é uma variável aleatória então cada sub-índice é um elemento de espaço de resultados do IDH geral, ou seja, é a média aritmética dos sub-índices, analiticamente tem-se: $\mathrm{IDH} = \frac{IDH_i}{i}$,onde IDH_i é o índice de desenvolvimento humano na dimensão i, $i\epsilon 1; 3 \Rightarrow IDH = \frac{IDH_E + IDH_R + IDH_S}{3}$ (6).

A expressão (6) é a fórmula para calcular o índice de desenvolvimento humano (IDH), de acordo os sub-índices já calculados no ponto 4.1 em cada dimensão.

A média geométrica

Apesar de ter-se considerado o cálculo do IDH com a média aritmética, pelo facto do IDH ser uma métrica do tipo índice, em 2010 o PNUD, introduziu mudanças importantes, entre as quais: a alteração dos indicadores da componente educação e de seus pesos; a introdução de limites mínimos fixos e máximos observados, o que resultou na introdução na utilização da média geométrica em vez de média aritmética para calcular de forma ajustada a métrica.

Deste modo, aqui apresenta-se a justificação da base da utilização da função matemática média geométrica no cálculo do IDH.

A média geométrica é frequentemente utilizada quando comparamos diferentes itens – encontrando uma única "figura representativa" para esses itens – quando cada um desses itens possuem múltiplas propriedades que possuem diferentes escalas numéricas.

Por exemplo, a média geométrica pode nos dar uma "média" significativa para comparar duas companhias que estão sendo classificadas numa escala de 0 a 5 para suas sustentabilidades ambientais e sendo classificadas de 0 a 100 para suas viabilidades financeiras. Se a média aritmética fosse usada em vez da média geométrica, a viabilidade financeira pesaria mais pois seu alcance numérico é grande, logo uma pequena mudança percentual na classificação financeira (por exemplo: uma mudança de 80 para 90) faria uma grande diferença na média aritmética do que uma grande diferença percentual na classificação da sustentabilidade ambiental (por exemplo uma mudança de 2 para 5 na escala).

A média geométrica se aplica apenas a números positivos a fim de evitar o cálculo do produto de um número negativo que poderia resultar em números imaginários, mas também para satisfazer certas propriedades sobre médias, o que é explicado mais tarde nesse artigo. Note que a definição é ambígua se consideramos a possibilidade de um dos termos ser zero. É também usado para um conjunto de números cujos valores são destinados a serem multiplicados ou são exponenciais na natureza, assim como os dados do crescimento da população humana ou avaliações de um investimento financeiro.

A média geométrica é também uma das três médias clássicas de Pitágoras, junta com a mencionada média aritmética e a média harmônica. Para todos os conjuntos de dados positivos contendo ao menos um par de valores diferentes, a média harmônica sempre será a menor dentre as três médias, enquanto a arimética sempre será a maior das três e a geométrica fica entre as duas.

O cálculo

A média geométrica de um conjunto de dados $\{x_1, x_2, x_3, \dots x_n\}$ é dada da seguinte forma:

$$\bar{x}_g = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \quad (7)$$

A média geométrica de um conjunto de dados é menor que o conjunto de dados da média aritmética ao menos que todos os elementos do conjunto de dados sejam iguais, o que nesse caso a média geométrica e aritmética são iguais.

Embora a média geométrica tenha sido relativamente rara na computação da estatística social, o PNUD desenvolveu o índice que usa o cálculo, pois possibilita o cálculo do IDH com uma função mais ajustada à da média aritmética.

A média geométrica decresce o nível de substituibilidade entre dimensões sendo comparadas e no mesmo tempo garante que 1 porcento recusa em dizer a expectativa de vida ao nascer tem o mesmo impacto no IDH como 1 porcento recusado na educação ou renda.

Assim, como base de comparação de arquivos, este método é o mais respeitável da inerente diferença através das dimensões do que uma média simples.

A média geométrica também é a **média aritmética-harmônica** no sentido de que se duas sequências (a_n) e (h_n) são definidas:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + h_n}{2},\ a_0 = x \text{ e } h_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{h_n}},\ h_0 = y$$

Onde h_{n+1} é a média harmónica dos valores anteriores das duas sequências, então a_n e h_n irão convergir para a média geométrica $x\ e\ y$. Isso pode ser visto facilmente pelo facto de que sequências convergem para um limite comum (de acordo o teorema de Bolzano-Weierstrass) e o facto de que a média geométrica é preservada:

$$\sqrt{a_i . h_i} = \sqrt{\frac{a_i + h_i}{\frac{a_i + h_i}{a_i h_i}}} = \sqrt{a_{i+1} . h_{i+1}}$$

Substituindo a média aritmética e a harmônica por um par de médias generalizadas de opostos, exponenciações finitas acarretam o mesmo resultado.

A média geométrica tem uma relação com a média aritmética associado ao logarítmo, ou seja, usando identidades de logaritmos para transformar a fórmula, a multiplicação pode ser expressa como soma e a potência como uma soma, noa caso obtém-se: $\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} = e^{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} lna_i\right]}$

a expressão acima é algumas vezes chamada de média logarítmica, quando usada a exponenciação para retornar o cálculo da escala original, i.e., é a média f- generalizada, neste caso com $f(x) = logx$.

A propriedade fundamental da média geométrica, que pode ser comprovada para ser falsa em qualquer outra média é:$GM\left(\frac{X_i}{Y_i}\right) = \frac{GM(X_i)}{GM(Y_i)}$.

Esta propriedade faz a média geométrica a única média correcta quando resulta em média normalizada, este é o resultado que está presente em relações com os valores de referência, este é o caso quando ao apresentar o desempenho do computador com respeito ao computador referente, ou quando computa-se um único índice de média de raíz severamente heterogénea (por exemplo a esperança de vida, média de anos de escolaridade e mortalidade infantil). Nesse cenário, poderia mudar o ranking dos resultados dependendo do que for usado como referência.

Por exemplo, repare a seguinte comparação de execução do tempo de programas de um computador:

Tabela 1- tempo de execução de programas de um computador, cenário 1

	Computador A	Computador B	Computador C
Programa 1	1	10	20
Programa 2	1000	100	20
Média aritmética	500,5	55	20
Média geométrica	31,622	31,622	20

A média aritmética e a geométrica concordam que o computador C é mais rápido. De qualquer modo, por apresentar valores apropriadamente normalizado e usando a média aritmética, pode-se entender que qualquer um dos outros dois computadores sendo o mais rápido. Normalizando pelos resultados de A como o computador mais rápido de acordo com a média aritmética, temos:

Tabela 2- tempo de execução de programas de um computador, cenário 2

	Computador A	Computador B	Computador C
Programa 1	1	10	20
Programa 2	1	0,1	0,02
Média aritmética	1	5,05	10,01
Média geométrica	1	1	0,632

enquanto normalizando pelos resultados de B como o computador mais rápido pela média aritmética temos:

Tabela 2- tempo de execução de programas de um computador, cenário 2

	Computador A	Computador B	Computador C
Programa 1	0,1	1	2
Programa 2	10	1	0,2
Média aritmética	5,05	1	1,1
Média geométrica	1	1	0,632

Em todos os casos, o ranking dado pela média geométrica continua o mesmo que o obtido sem os valores normalizados.

Portanto, a média geométrica é a mais usual e assertiva para o cálculo do IDH geral, ou seja, o IDH é a média geométrica dos sub-índices IDH_E, IDH_R, IDH_S, analiticamente tem-se: $IDH = \sqrt[3]{IDH_E.IDH_R.IDH_S}$ (7).

A expressão (7) é a fórmula matemática para o cálculo do índice de desenvolvimento humano-IDH pela média geométrica, de acordo os sub-índices já calculados no ponto 4.1 em cada dimensão.

4.3. Calculando o IDH de Angola com dados de 2014

Nesta subsecção vamos fazer alguns cálculos a título de exemplo, desde a construção dos sub-índices e cálculo do IDH pela média aritmética e geométrica, tendo como informações, as estatísticas de Angola de 2014.

Consideremos os seguintes dados do Censo de 2014:

Taxa de alfabetização (TA) = 65,6% = 0,6560;

Taxa de frequência escolar (TF) = 70,0%=0,7001

Com estas informações estatísticas pode-se calcular o sub-índice de educação ($\boldsymbol{IDH_E}$), neste caso, $\boldsymbol{IDH_E} = \frac{2}{3}\left(\frac{TA - TA_{mín}}{TA_{máx} - TA_{mín}}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{TF - TF_{mín}}{TF_{máx} - TF_{mín}}\right)$ sabendo que as taxas mínimas e máximas pré-definidas para os indicadores da alfabetização e frequência escolar é 0 e 100% respectivamente, conforme abordado em 4.1.

Introduzindo os dados na fórmula e desenvolvendo vem:

$$\boldsymbol{IDH_E} = \frac{2}{3}\left(\frac{0,6560 - 0}{1 - 0}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{0,7001 - 0}{1 - 0}\right) = \frac{2}{3} \times 0,6560 + \frac{1}{3} \times 0,7001 = 0,4373 + 0,2334$$

$=> \boxed{\boldsymbol{IDH_E} = 0,6707}$

Para efeitos de cálculo e uniformização de contas, trabalhou-se apenas com 4 casas decimais.

Obtido o sub-índice de desenvolvimento humano para educação, vamos agora calcular o $\boldsymbol{IDH_R}$.

Consideremos os dados do Censo 2014 e Notas de Imprensa Contas Nacionais Anuais (2009-2016) respectivamente:

População total (2014) = 25 901 182;

PIB (2014) = 14 323 859 (Valor em 1 000 000 AKz)

O valor do PIB em causa é na óptica dos Preços correntes do período em referência, com isso calculemos o PIB per capita: $PIB_{PC} = \frac{PIB(2014)}{População\ total\ 82014)} = \frac{14\ 323\ 859 \times 10^6}{25\ 901 \times 10^3} = 553\ 023 => PIB_{PC} = 553\ 023$ Kz/habitante

Daqui, $IDH_R = \frac{\log PIB_{PC} - logPIB_{PCmín}}{logPIB_{PCmáx} - logPIB_{PCmín}} = \frac{\log 553023 - log9830}{log3932000 - log9830} = \frac{5,7427 - 3,9926}{6,5946 - 3,9926} = \frac{1,7502}{2,6021}$

$=> \boxed{IDH_R = 0,6726}$

Dar nota que, para o cálculo do sub-índice de desenvolvimento humano na dimensão Renda, utilizou-se a taxa de câmbio média de referência do Banco nacional de Angola (BNA), fixado em Setembro de 2014 em 98,3 Kz por USD. Isso para facilitar o cálculo da conversão dos valores PIB per capita mínimo e máximo dado em USD pelo PNUD. Deste modo, o numerador e o denominador convergem ambos em unidade monetária Kz.

De seguida calculemos o sub-índice de desenvolvimento humano na dimensão saúde IDH_S.

Consideremos o dado sobre esperança de vida da população Angolana, de acordo a projecção 2014-2050 e os valores mínimos e máximos estipulados pelo PNUD:

$E_{observ} = 60{,}09\ (2014)$

$E_{mín} = 25{,}00$

$E_{máx} = 85{,}00$

$$\boldsymbol{IDH_S} = \frac{E - E_{mín}}{E_{máx} - E_{mín}} = \frac{60{,}09 - 25{,}00}{85{,}00 - 25{,}00} = \frac{35{,}09}{60{,}00} = 0{,}5848 \Rightarrow \boxed{IDH_S = 0{,}5848}$$

Finalmente, calculemos o IDH pelas duas médias já estudadas anteriormente, primeiro vamos calcular pela média aritmética e depois pela geométrica.

Pela média aritmética tem-se: $IDH = \frac{IDH_E + IDH_R + IDH_S}{3} = \frac{0{,}6707 + 0{,}6726 + 0{,}5848}{3} = \frac{1{,}9281}{3}$

$\Rightarrow \boxed{IDH = 0{,}6427}$

Calculando pela média geométrica tem-se: $IDH = \sqrt[3]{IDH_E . IDH_R . IDH_S} = \sqrt[3]{0{,}6707 \times 0{,}6726 \times 0{,}5848} \Rightarrow \sqrt[3]{0{,}2638} \Rightarrow \boxed{IDH = 0{,}6413}$

De acordo os resultados obtidos tanto com a média aritmética quanto geométrica, o IDH de Angola para 2014 está no intervalo $[0{,}500 - 0{,}799]$, o que atribui a nação a classificação de **País de Médio Desenvolvimento humano**.[2]

Tabela 4-Variação do IDH de Angola 2021 vs 2014

2014	2021	Variação
0,641[3]	0,586	-0,055

Fonte: Relatório do Desenvolvimento Humano síntese, 2021/2022, PNUD; arranjo e cálculo do autor.

[2] De acordo a classificação do PNUD no relatório sobre IDH-global 2014.

[3] IDH calculado pelo autor com base informações de 2014

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir da compreensão da construção do IDH e os pressupostos matemáticos que estão na base de seu cálculo, pôde-se esperar uma mudança considerável no que diz respeito ao entendimento das ferramentas estatística-matemática em prol da mensuração do bem-estar dos países, indicando que mais pessoas podem beneficiar e compreender a utilidade da Matemática nas ciências sociais e quantitativas.

Além disso, essa mudança positiva por parte das pessoas e usuários da Matemática, Estatística e Ciências voltadas ao desenvolvimento comunitário e social têm grandes possibilidades de fazer um uso mais adequado dos recursos Matemáticos de que dispõem, possibilitando melhores tratamento e aproveitamento dos dados sociais, demográficos e económicos na modelação de problemas com vista a mensurar o nível de vida e bem-estar das populações Não só ao nível de países como também pode ser adaptado aos níveis locais, permitindo assim avaliar o grau de assimetria entre distintas regiões de um mesmo território.

Da mesma forma que o IDH teve por objetivo fazer os governantes, gestores, pesquisadores, académicos e público em geral perceberem a importância de determinadas políticas como modo de melhorar o bem-estar da população, a demonstração e evidenciação dos aspectos da Matemática que sustentam o cálculo do IDH proporciona uma nova abordagem, compreensão e motivação destes na aplicação e estudo do IDH com vista mensuração da qualidade e a eficácia de políticas públicas que podem contribuir para um resultado positivo no desenvolvimento económico.

ABSTRACT

Being nowadays an important source of information for the definition of public policies and investments among nations, competing with the human development index (HDI) not only represents the current economic and social situation of a country, but also considers the efforts employed in the search of better results. Accordingly, this article aims to present the mathematical-statistical fundamentals that underlie the design and calculation of the HDI, that is, the analytical formulation, the mathematical combination of indicators and the final formula used to gather and calculate the index as a continuous metric to measure the human development index. As a new element, knowledge of the mathematical foundations of the HDI, can produce a better view of this very important social indicator of human well-being, despite criticism from several specialists, the HDI is widely used for evaluation and comparison between countries to the point of allow an adaptation and contextualization in the measurement of human development between different geographic locations of the same territory, consequently, new means of achieving social and economic development and reducing regional asymmetries, which causes a considerable change in the phenomenon of rural exodus that is characteristic in developing countries.

Keywords: HDI, Indicator, Mathematics

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Índice de desenvolvimento humano eficiente: uma Mensuração alternativa do bem-estar das nações, Dalberto. C, et all; Agosto de 2015, 34 pág;
2. BANKER, R. D.; CHARNES, H.; COOPER, W. W. Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis. Management Science, v. 30, n. 9, p. 1078-1092, 1984;
3. HAQ, M. Reflections on human development. New York: Oxford University Press, 199;
4. Recenseamento Geral da população e da Habitação, RGPH 2014, Resultados Definitivos, INE Angola;
5. Projecção da população de Angola 2014-2050, INE Angola, 2016;
6. Inquérito de Despesas, receitas e Emprego em Angola, IDREA 2018-2019;
7. Pobreza Multidimensional nos municípios de Angola, Relatório IPM pobreza multidimensional, INE, Angola, 2019;
8. Nota de imprensa: Contas Nacionais anuais, 2009-2016, Angola, Abril de 2016;
9. Abreu, António Ferreira, Apontamentos de Geometria, 2a. Edição, 1921, Brasil;
10. Relatório do Desenvolvimento Humano síntese, 2021/2022, UNDP, 40 Pág;
11. Apontamentos das Aulas teóricas de Álgebra Linear, Nuno Martins, Fevereiro de 2014, 119 pág;
12. Ana Paula Santana e João Filipe Queirós, Introdução à Álgebra Linear, Gradiva, 2010;
13. Gilbert Strang, Linear Algebra and its Applications, 3rd edition, Thomson Learning, 1988;
14. www.https://pt.wikipedia.org/wiki/M%C3%A9dia_geom%C3%A9trica.