TEMA: SEGUNDA PARTE DA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DA MATEMÁTICA NA ESCOLA SUPERIOR PEDAGÓGICA DO CUANDO CUBANGO- ANGOLA

Autor: MSc. José Luis Sabonete Calulo

Docente da Escola Superior Pedagógica do Cuando Cubango, com a categoria de Assistente

E-mail: jsabonetecalulo@gmail.com/ sabonetejluis1@hotmail.com

Resumo

Este artigo tem como finalidade, abordar temáticas relacionadas com a unidade curricular, facilitando assim, a compreensão dos tipos de funções e interpretação, contribuindo para alcançar o perfil de um profissional à altura de satisfazer as exigências da sociedade. Por outro lado, este artigo tem como finalidade, de resumir o estudo das principais funções abordadas ao longo dos níveis anteriores. Todavia, faremos referência aos aspectos relacionados com a transformação de funções, deste o ponto de vista teórico, assim como, os relacionados com a prática de exercícios. Finalmente, apresentamos as conclusões, recomendações e bibliografia.

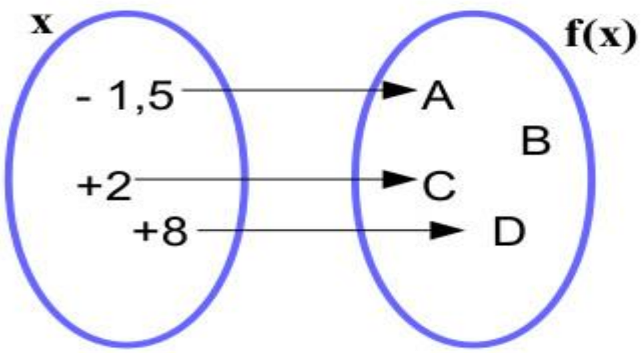
Tipos de funções

Neste artigo, faremos abordagem das seguintes funções:

- **Função injetora ou injetiva**

Nessa função, cada elemento do domínio (x) associa-se a um único elemento da imagem *f(x)*. Todavia, podem existir elementos do contradomínio que não são imagem. Quando isso acontece, dizemos que o contradomínio e imagem são diferentes. Veja um exemplo:

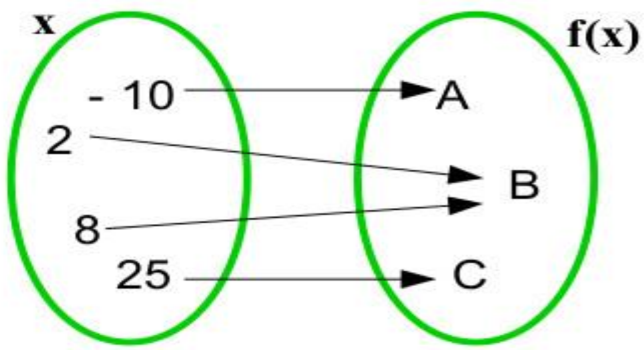
- Conjunto dos elementos do domínio da função: *D(f) = {-1,5, +2, +8}*
- Conjunto dos elementos da imagem da função: *Im(f) = {A, C, D}*
- Conjunto dos elementos do contradomínio da função: *CD(f) = {A, B, C, D}*



- **Função Sobrejectora ou sobrejectiva**

  Na função sobrejectiva, todos os elementos do domínio possue um elemento na imagem. Pode acontecer dois elementos do domínio possuírem a mesma imagem. Nesse caso, imagem e contradomínio possuem a mesma quantidade de elementos.

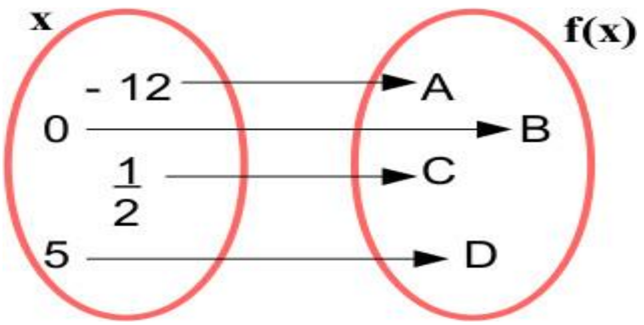
- Conjunto dos elementos do domínio da função: *D(f)* = {-10, 2, 8, 25}
- Conjunto dos elementos da imagem da função: *Im (f)* = {A, B, C}
- Conjunto dos elementos do contradomínio da função: *CD (f)* = {A, B, C}



- **Função bijectora ou bijectiva**

  Essa função é ao mesmo tempo injectora e sobrejectora, pois, cada elemento de x relaciona-se a um único elemento de f(x). Nessa função, não acontece dois números distintos possuírem a mesma imagem, e o contradomínio e a imagem possuem a mesma quantidade de elementos.

- Conjunto dos elementos do domínio da função: $D(f) = \{-12, 0, \frac{1}{2}, 5\}$
- Conjunto dos elementos da imagem da função: $Im\ (f) = \{A, B, C, D\}$
- Conjunto dos elementos do contradomínio da função: $CD\ (f) = \{A, B, C, D\}$



Até ao último ano do Ensino Médio ou equiparado, geralmente estudam-se diferentes funções, onde destacamos algumas:

1 – Função constante;

2 – Função par;

3 – Função ímpar;

4 – Função afim ou polinomial do primeiro grau;

5 – Função Linear;

6 – Função crescente;

7 – Função decrescente;

8 – Função quadrática ou polinomial do segundo grau;

9 – Função modular;

10 – Função exponencial;

11 – Função logarítmica;

12 – Funções trigonométricas.

Mostraremos agora o gráfico e a fórmula geral de cada uma das funções referenciadas acima:

1 - Função constante

Na função constante, todo valor do domínio (x) tem a mesma imagem (y).

Fórmula geral da função constante:

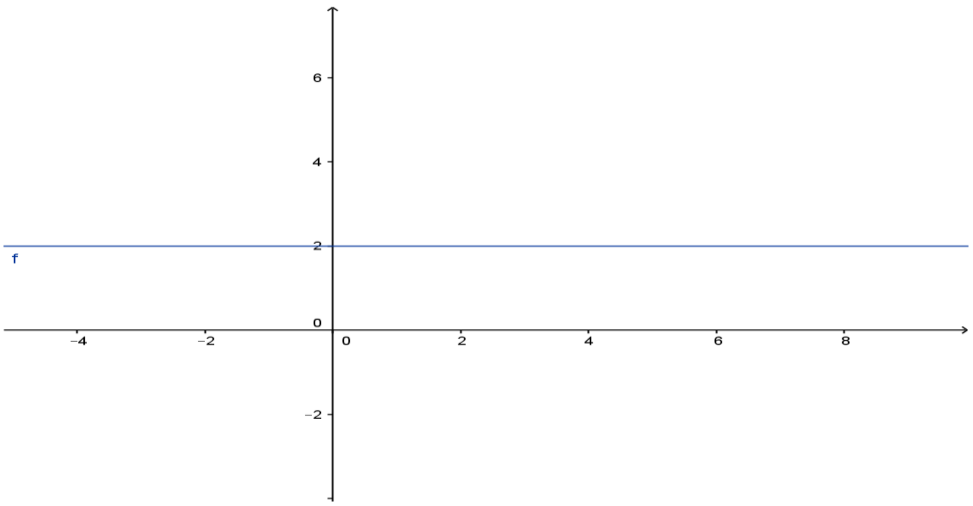
$f(x) = c$

x = Domínio

$f(x)$ = Imagem

c = constante, que pode ser qualquer número do conjunto dos reais.

Exemplo de gráfico da função constante: $f(x) = 2$



2 – Função Par

A função par é simétrica em relação ao eixo vertical, ou seja, à ordenada y. Entenda simetria como sendo uma figura/gráfico que, ao dividi-la em partes iguais e sobrepô-las, as partes coincidem-se perfeitamente.

Fórmula geral da função par:

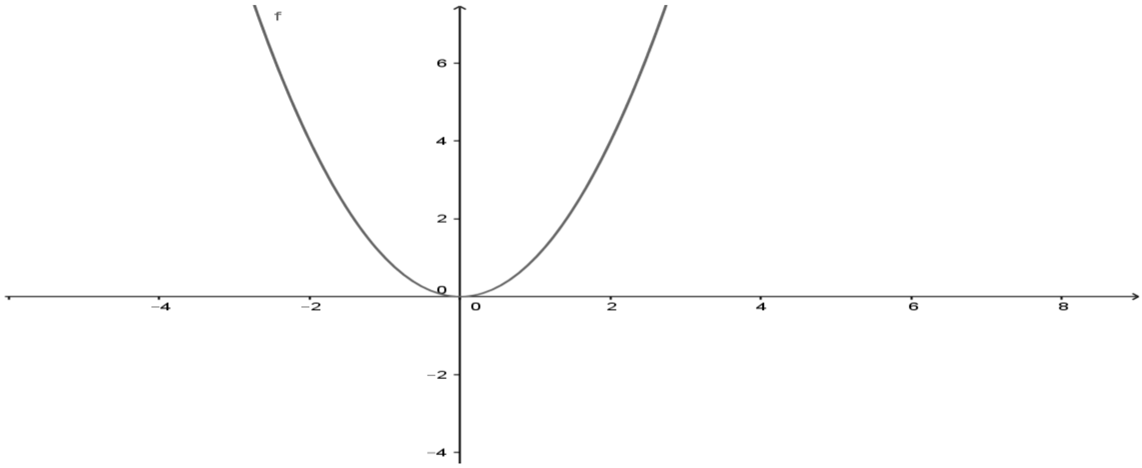
$f(x) = f(-x)$

x = domínio

$f(x)$ = imagem

$-x$ = simétrico do domínio

Exemplo de gráfico da função **par:** $f(x) = x^2$



3 – Função ímpar

A função ímpar é simétrica (figura/gráfico que, ao dividi-la em partes iguais e sobrepô-las, as partes coincidem-se perfeitamente) em relação ao eixo horizontal, ou seja, à abscissa x.

Fórmula geral da função ímpar

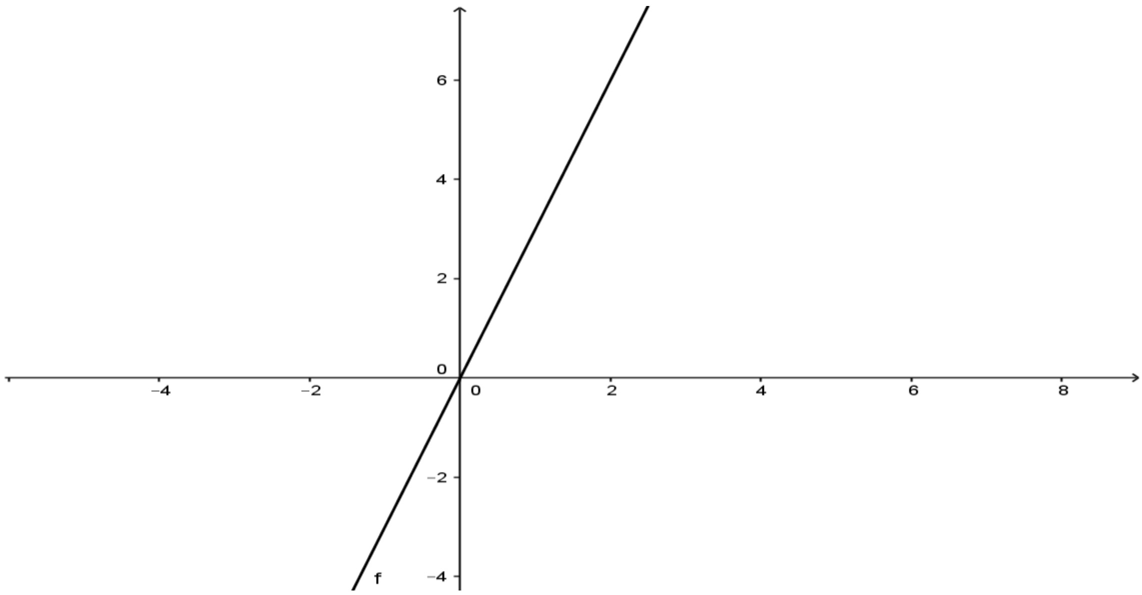
f(– x) = – f(x)

– x = domínio

f(– x) = imagem

- *f(x)* = simétrico da imagem

Exemplo de gráfico da função ímpar: *f(x) = 3x*



4 – Função afim ou polinomial do primeiro grau

Para saber se uma função é polinomial do primeiro grau, devemos observar o maior grau da variável x (termo desconhecido), que sempre deve ser igual a 1. Nessa função, o gráfico é uma reta. Além disso, ela possui: domínio **x**, imagem ***f(x)*** e coeficientes **a** e **b**.

Fórmula geral da função afim ou polinomial do primeiro grau

$f(x) = ax + b$

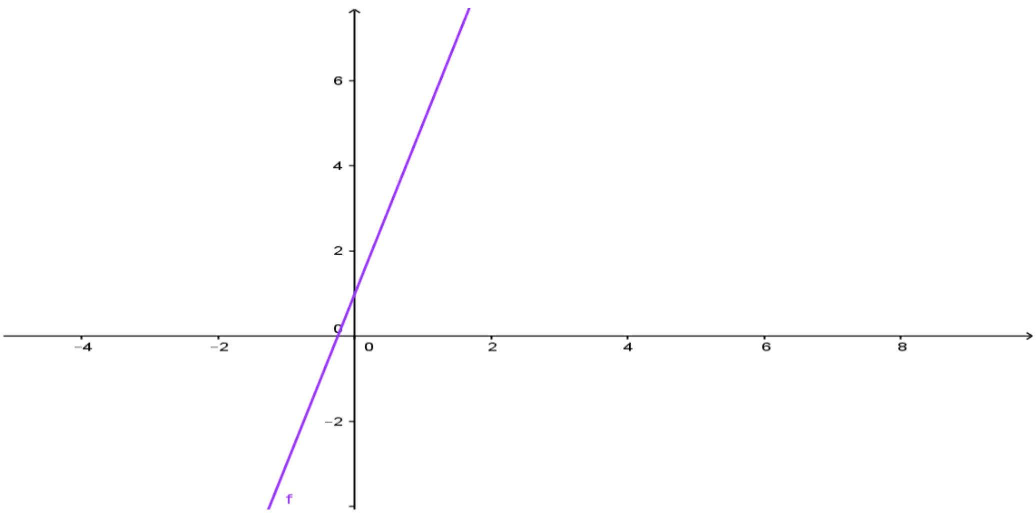
x = domínio

$f(x)$ = imagem

a = coeficiente

b = coeficiente

Exemplo de gráfico da função polinomial do primeiro grau: *f(x) = 4x + 1*



5 – Função Linear

A função linear tem sua origem na função do primeiro grau (f(x) = ax + b). Trata-se de um caso particular, pois b sempre será igual a zero.

Fórmula geral da função linear

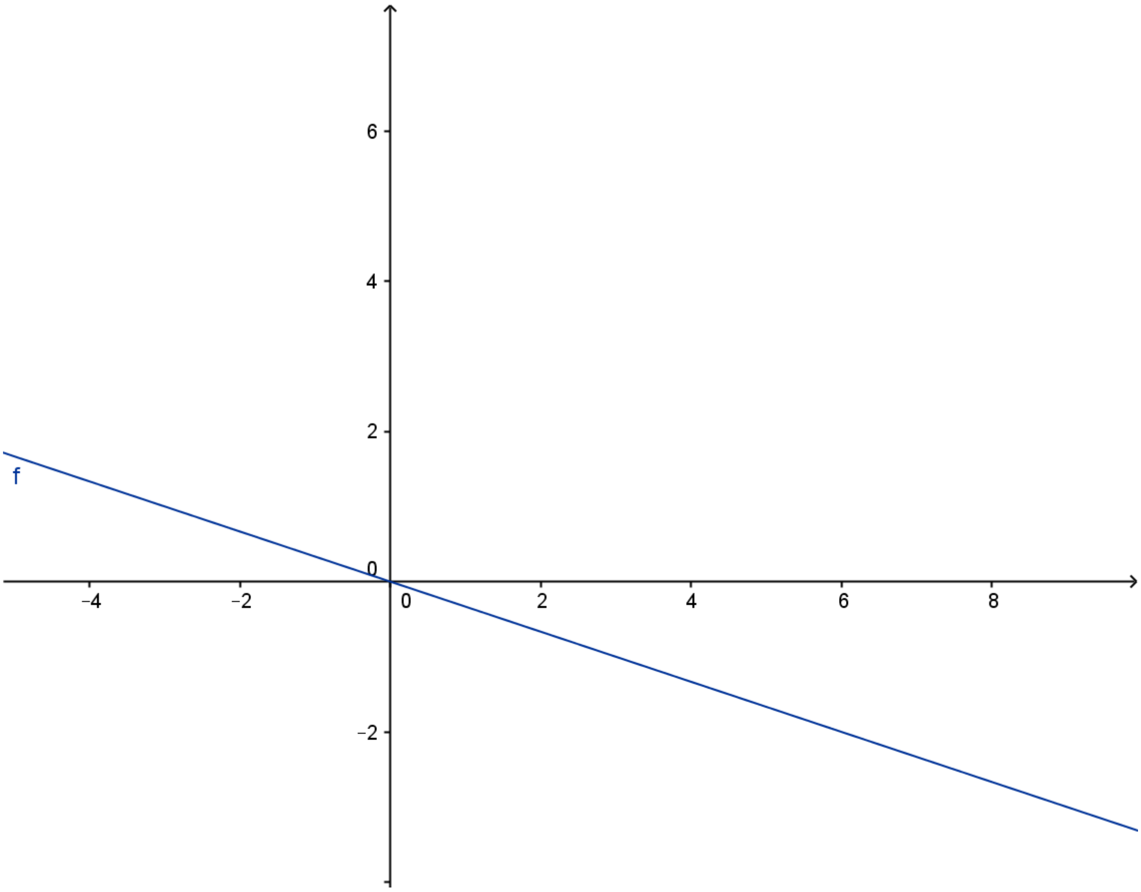
f(x) = ax

x = domínio

f(x) = imagem

a = coeficiente

Exemplo de gráfico da função linear: ***f(x) = -x/3***



6 – Função crescente

A função polinomial do primeiro grau será crescente quando o coeficiente **a** for diferente de zero e maior que um **(a** > **1)**.

Fórmula geral da função crescente

f(x) = ax + b

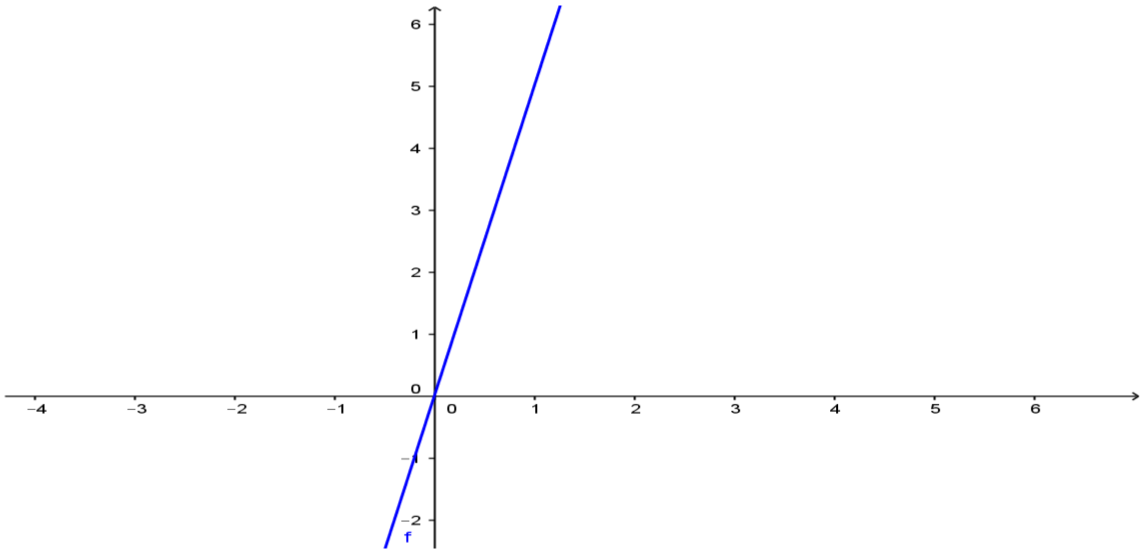
x = domínio

f(x) = imagem

a = coeficiente sempre positivo

b = coeficiente

Exemplo de gráfico da função crescente: ***f(x) = 5x***



7 – Função decrescente

Na função decrescente, o coeficiente **a** da função do primeiro grau *(f(x) = ax + b)* é sempre negativo.

Fórmula geral da função decrescente

f(x) = - *ax* + b

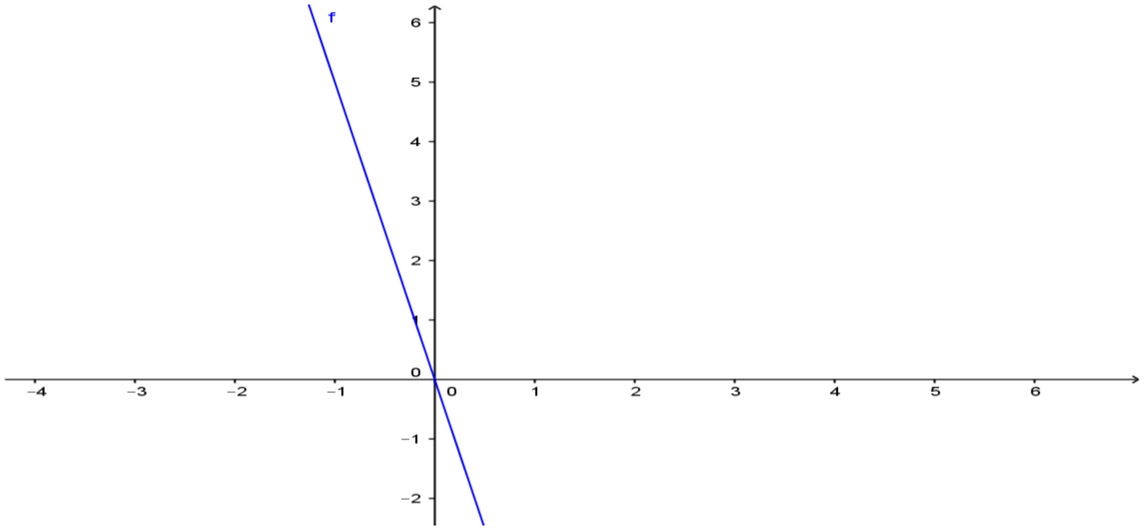
x= domínio/ incógnita

f(x) = imagem

- *a* = coeficiente sempre negativo

b = coeficiente

Exemplo de gráfico da função decrescente: f(x) = - 5x



8 – Função quadrática ou polinomial do segundo grau

Identificamos que uma função é do segundo grau quando o maior expoente que acompanha a variável x (termo desconhecido) é 2. O gráfico da função polinomial do segundo grau sempre será uma parábola. A sua concavidade muda de acordo com o valor do coeficiente **a.** Sendo assim, se **a** é positivo, a concavidade é para cima e, se for negativo, é para baixo.

Fórmula geral da função quadrática ou polinomial do segundo grau

$f(x) = ax^2 + bx + c$

x = domínio

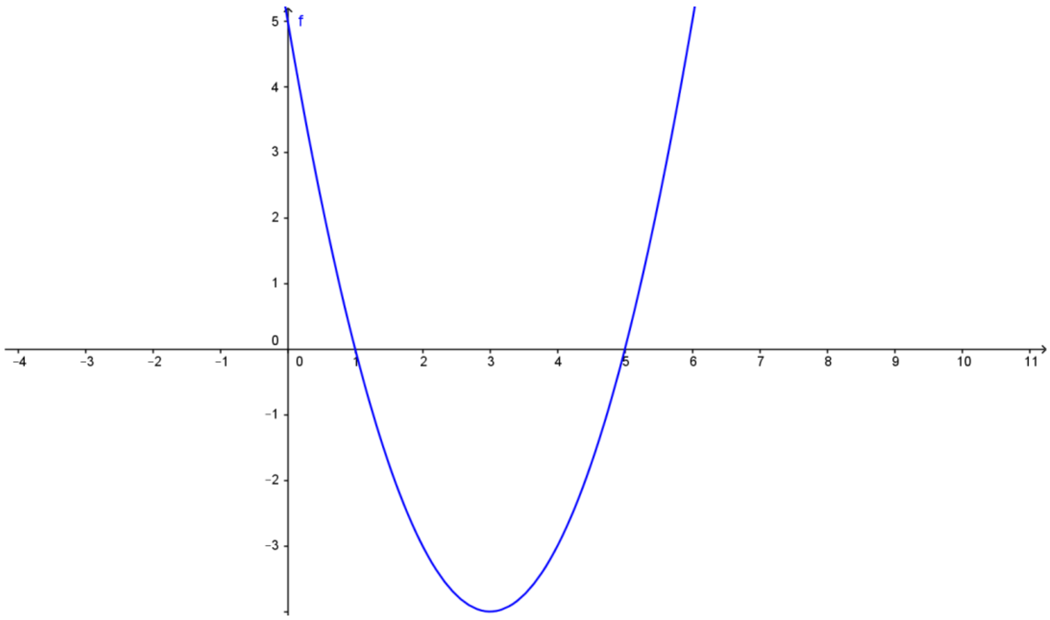
$f(x)$ = imagem

a = coeficiente que determina a concavidade da parábola.

b = coeficiente.

c = coeficiente.

Exemplo de gráfico da função polinomial do segundo grau: $f(x) = x^2 – 6x + 5$



9 – Função modular

A função modular apresenta o módulo, que é considerado o valor absoluto de um número e é caracterizado por | |. Como o módulo sempre é positivo, esse valor pode ser obtido tanto negativo quanto positivo. Exemplo: |x| = + x ou |-x| = x.

Fórmula geral da função modular

$f(x) = x$, se $x \geq 0$

ou

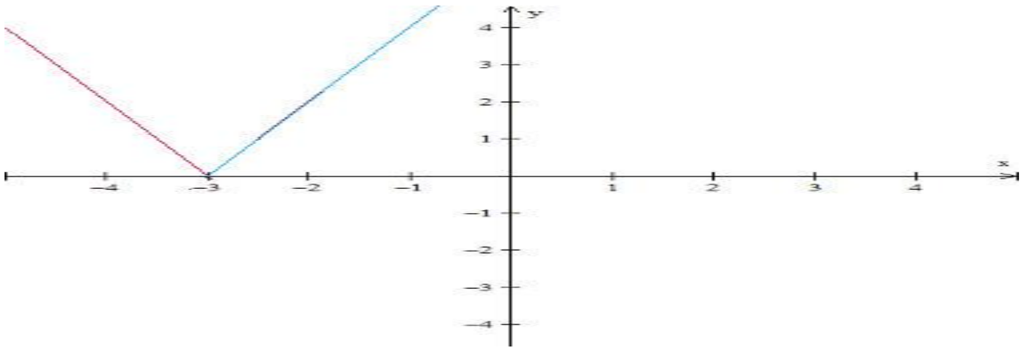
f(x) = – x, se x < 0

x = domínio

f(x) = imagem

- *x* = simétrico do domínio

Exemplo de gráfico da função modular: ***f(x)*** **=** $-|2x+6|$



10 – Função exponencial

Uma função será considerada exponencial quando a variável x estiver no expoente em relação à base de um termo numérico ou algébrico. Caso esse termo seja maior que 1, o gráfico da função exponencial é crescente. Mas se o termo for um número entre 0 e 1, o gráfico da função exponencial é decrescente.

Fórmula geral da função exponencial

$f(x) = a^x$

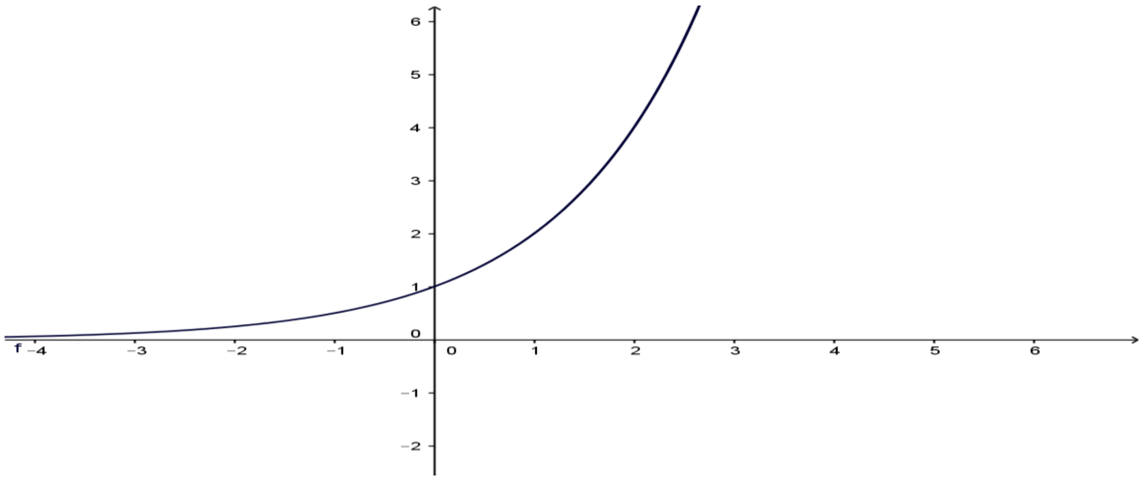
$a > 1$ ou $0 < a < 1$

x = domínio

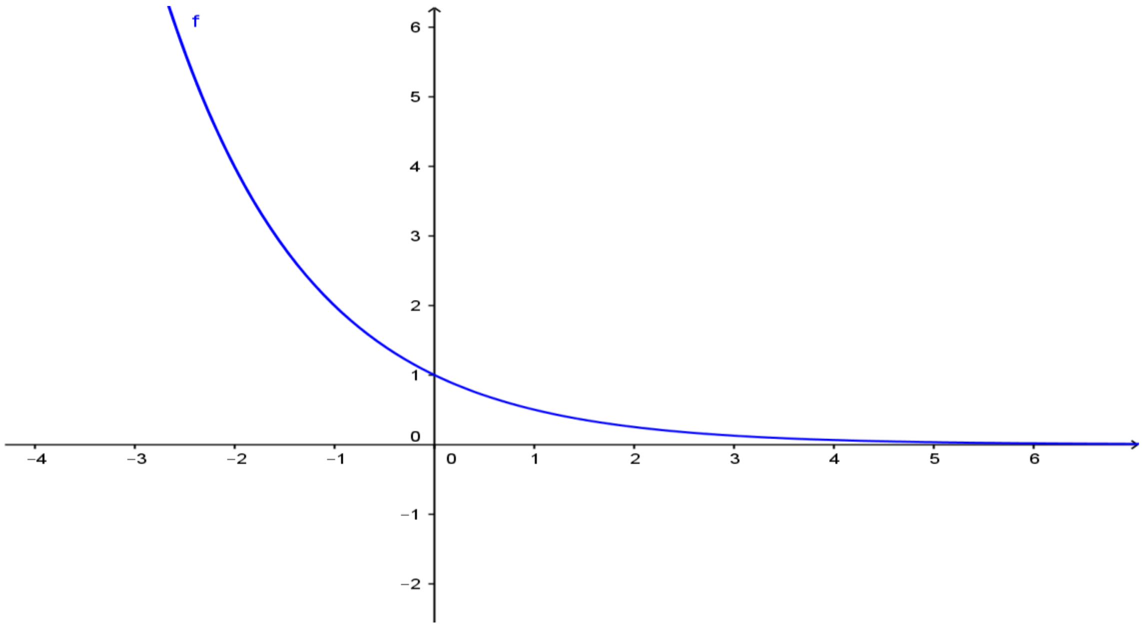
f(x) = imagem

a **=** Termo numérico ou algébrico

Exemplo de gráfico da função exponencial crescente: $f(x) = (2)^x$ **para a = 2**



Exemplo de gráfico da função exponencial decrescente: $f(x) = (1/2)^x$ **para a = ½**



11 - Função logarítmica

Na função logarítmica, o domínio é o conjunto dos números reais maiores que zero e o contradomínio é o conjunto dos elementos dependentes da função, sendo todos números reais.

Fórmula geral da função logarítmica

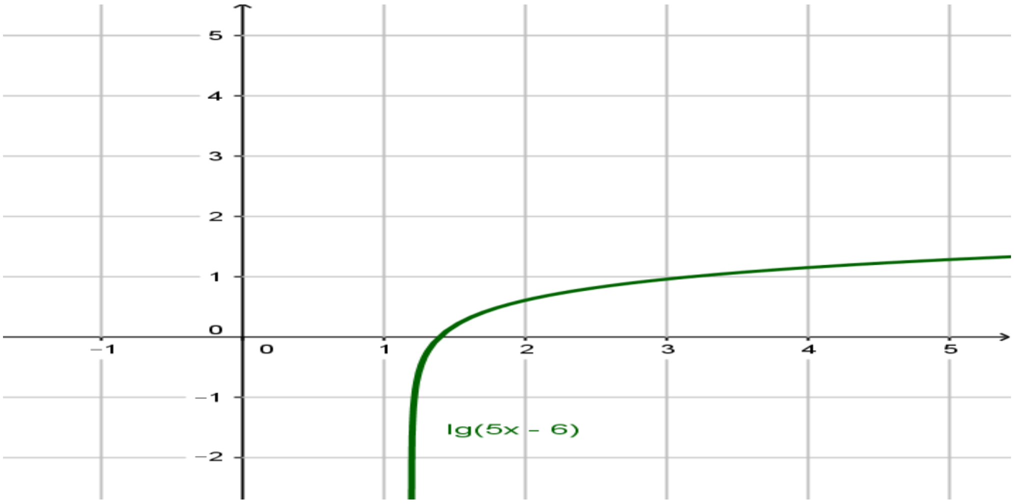
$f(x) = log_a\ x$

a = base do logaritmo

$f(x)$ = Imagem/ logaritmando

x = Domínio/ logaritmo

Exemplo de gráfico da função logarítmica: $f(x) = log\ (5x - 6)$



12 – Funções trigonométricas

As funções trigonométricas são consideradas funções angulares e são utilizadas para o estudo dos triângulos e em fenômenos periódicos. Podem ser caracterizadas como razão de coordenadas dos pontos de um círculo unitário. As funções consideradas elementares são:

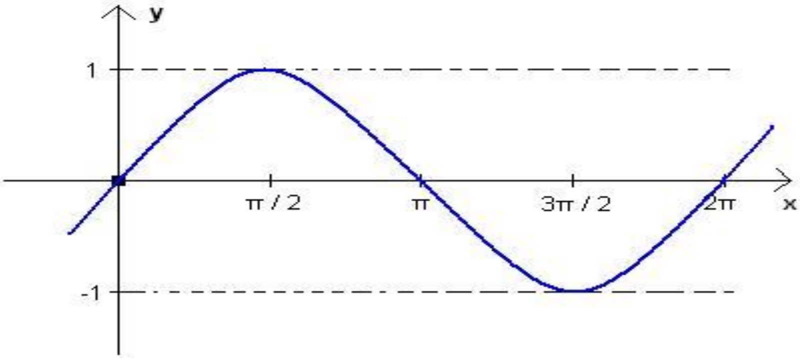
Seno: *f(x) = sen x*

Cosseno: *f(x) = cos x*

Tangente: *f(x) = tg x*

Exemplo de gráfico da função trigonométrica seno: *f(x) = senx*

O gráfico da função y = sen x é chamado senoide.



Resumindo, temos:

1- Função y = sen x ou f(x) = sen x

2- O domínio é *D(f) = IR*

3- O conjunto-imagem é *Im(f) = [-1;1]*.

4- A função é periódica, de período 2π.

5- O sinal da função é:

positivo no 1º e 2º quadrantes;

negativo no 3º e 4º quadrantes.

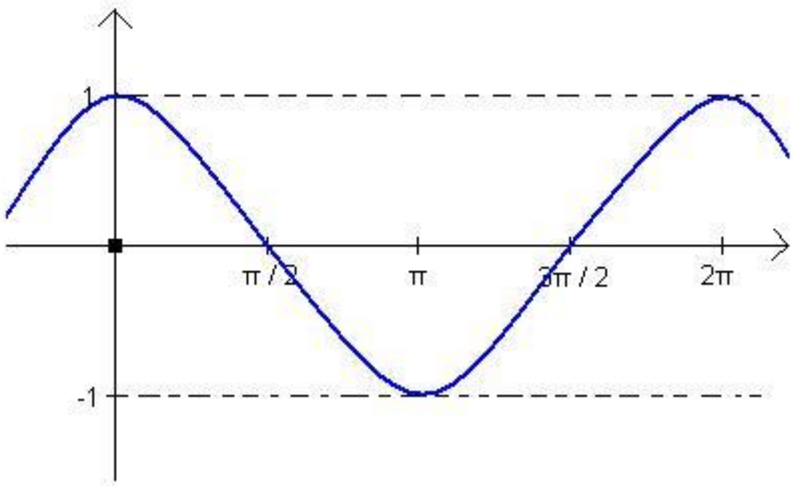
6- A função é ímpar.

7- A função é crescente no 1º e 4º quadrantes e decrescente no 2º e 3º quadrantes.

Exemplo: Mostre que a função definida por f(x)=sen(x) é ímpar, isto é, sen(-a)=-sen(a), para qualquer a real.

$$\begin{aligned} sen(-a) &= sen(2\pi - a) \\ &= sen(2\pi).cos(a) - cos(2\pi).sen(a) \\ &= 0 \,.\, cos(a) - 1 \,.\, sen(a) \\ &= -sen(a) \end{aligned}$$

Exemplo de gráfico da função trigonométrica cosseno: *f(x) = cosx*



Resumindo temos:

1- Função y = cos x ou f(x) = cos x

2- O domínio é *D(f) = R*

3- O conjunto imagem é *Im(f) = [-1;1]*

4- A função é periódica de período 2π.

5- O sinal da função é:

positivo no 1º e 4º quadrantes;

negativo no 2º e 3º quadrantes.

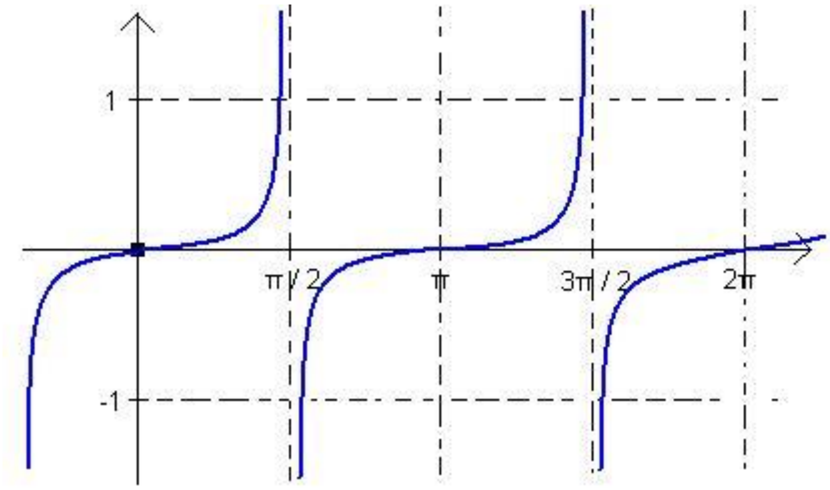
6 - A função é função par.

7- A função é crescente no 3º e 4º quadrantes e decrescente no 1° e 2º quadrantes.

Exemplo: Mostre que a função definida por f(x)=cos(x) é par, isto é, cos(-a) = cos(a), para qualquer a real.

$$\cos(-a) = \cos(2\pi - a)$$
$$= \cos(2\pi).\cos(a) + \text{sen}(2\pi).\text{sen}(a)$$
$$= 1.\cos(a) + 0.\text{sen}(a)$$
$$= \cos(a)$$

Exemplo de gráfico da função tangente: ***f(x) = tg (x)***



Resumindo temos:

1- Função *y = tg x* ou *f(x) = tg x*

2- O domínio é *D(f) = {x E R/ x# π/2 + k . π, k E Z}*

3- O conjunto imagem é *Im(f) = R.*

4- A função é periódica, de período π.

5- O sinal da função é:

positivo no 1º e 3º quadrantes;

negativo no 2º e 4º quadrantes.

6- A função é uma função Ímpar.

7- A função é crescente em todos os quadrantes.

Resumo

	$f(x) = sen(x)$	$f(x) = cos(x)$	$f(x) = tg(x)$
Domínio	$x \in IR$	$x \in IR$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k.\pi;\ \forall k \in Z$
Imagem	$y \in [-1; 1]$	$y \in [-1; 1]$	$y \in IR$
Período	2π	2π	π

Transformações dos gráficos

Sejam as funções: $f(x) = A + B \bullet sen(Cx)$ ou $f(x) = A + B \bullet \cos(Cx)$

A $\longrightarrow$ Desloca o gráfico **A** unidades para cima quando **A** for maior que zero ($A > 0$) ou para baixo quando **A** for menor que zero ($A < 0$). Afecta a imagem. A recta $y = A$ é um eixo de simetria da curva.

B $\longrightarrow$ Altera a amplitude sem alterar o período. Afecta a imagem. Reflecte o gráfico em torno eixo de simetria se negativo.

C $\longrightarrow$ Altera o período. Não afecta a imagem. $P = \dfrac{2\pi}{|C|}$.

Exercícios

1. Faça o estudo das seguintes funções:
   a. $f(x) = \cos(2x)$
   b. $f(x) = 2sen(x)$
   c. $f(x) = sen(2x)$

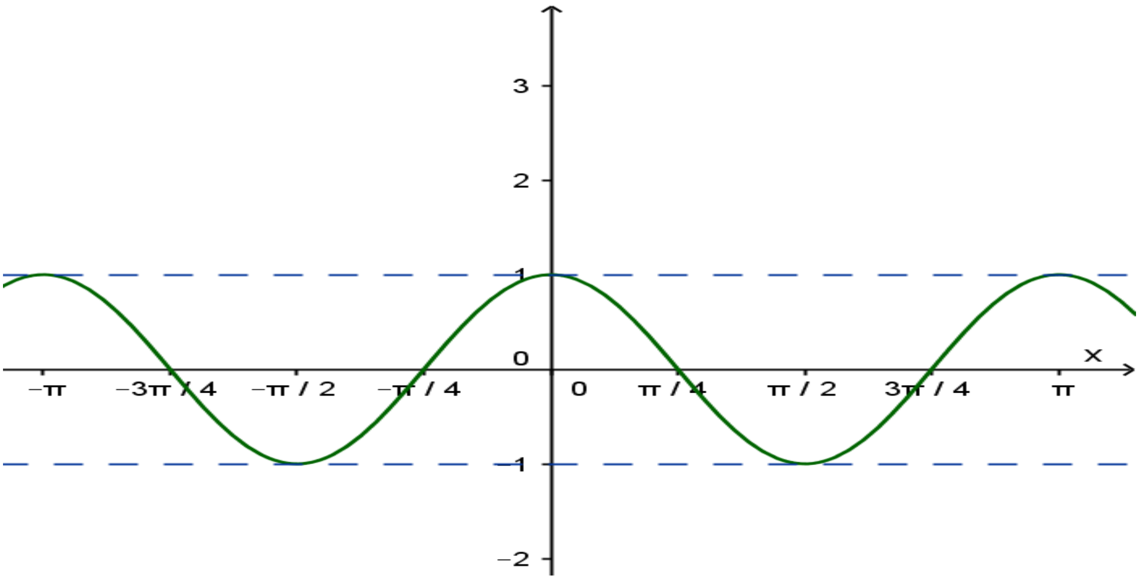
Resolução

a. $f(x) = \cos(2x)$

$D_f = IR$ $\quad I_f = [-1;1]$ $\quad P = \frac{2\pi}{|C|} \Rightarrow P = \frac{2\pi}{2} = \pi$

x	$2x$	$y = \cos(2x)$
$0°$	$0°$	1
$45°$	$90°$	0
$90°$	$180°$	-1
$135°$	$270°$	0
$180°$	$360°$	1

Representação gráfica

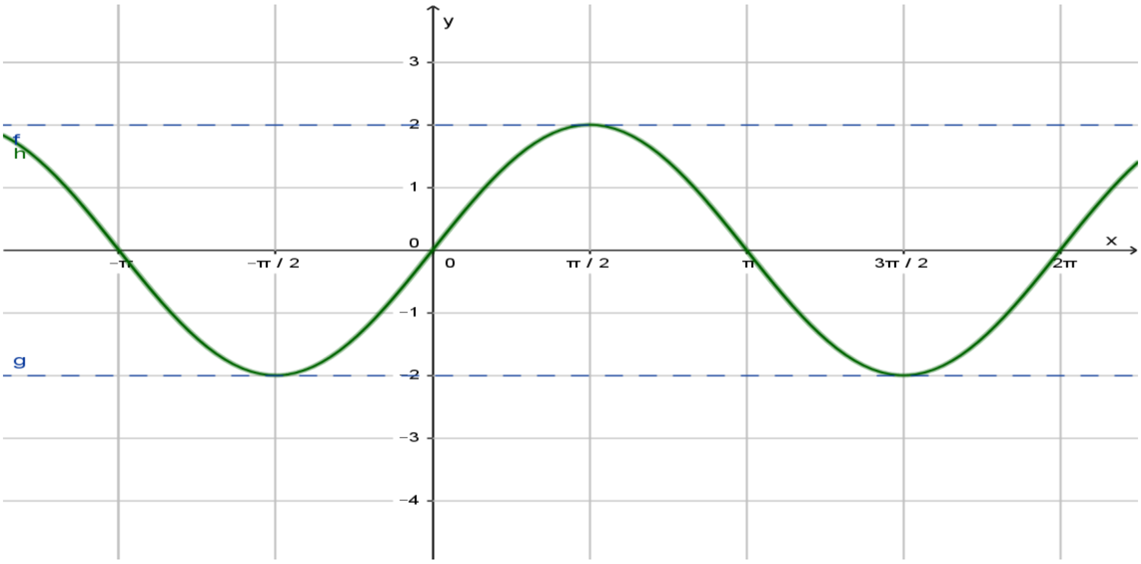


b. $f(x) = 2sen(x)$

$D_f = IR$ $\quad I_f = [-2;2]$ $\quad P = \frac{2\pi}{|C|} \Rightarrow P = 2\pi$

x	$sen(x)$	$y = 2sen(x)$
$0°$	0	0
$90°$	1	2
$180°$	0	0
$270°$	-1	-2
$360°$	0	0

Representação gráfica



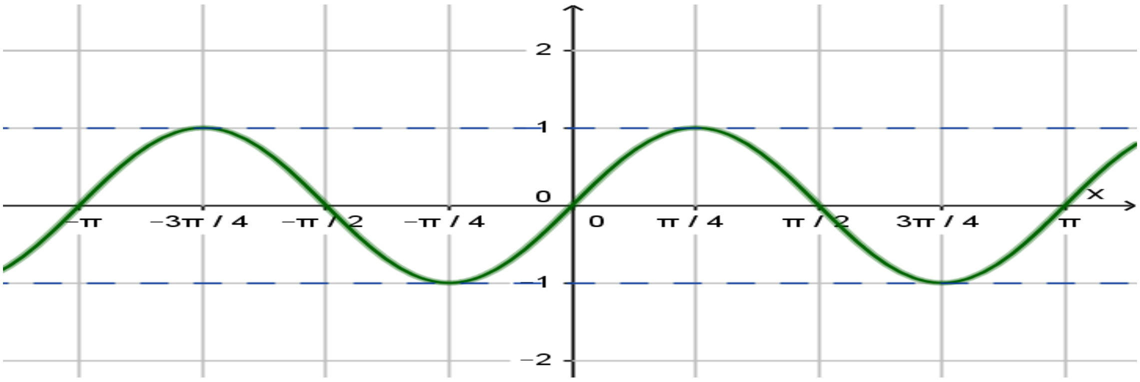
c. $f(x) = sen(2x)$

$D_f = IR$ $\quad I_f = [-1;1]$ $\quad P = \dfrac{2\pi}{|C|} \Rightarrow P = \pi$

x	$2x$	$y = sen(2x)$
$0°$	$0°$	0

$45°$	$90°$	1
$90°$	$180°$	0
$135°$	$270°$	-1
$180°$	$360°$	0

Representação gráfica



Trabalho autónomo do Estudante: B

Faça analise das demais propriedades do gráfico acima.

2. Esboce o gráfico da função $f(x) = 1 + 2 \bullet sen(x)$.

Resolução

A imagem é obtida a partir dos valores máximos e mínimos de $senx$. Desta forma, são valores extremos de $f(x)$.

Assim temos:

$$D_f = IR$$

$$1 + 2 \bullet 1 = 3$$
$$1 + 2 \bullet (-1) = -1$$

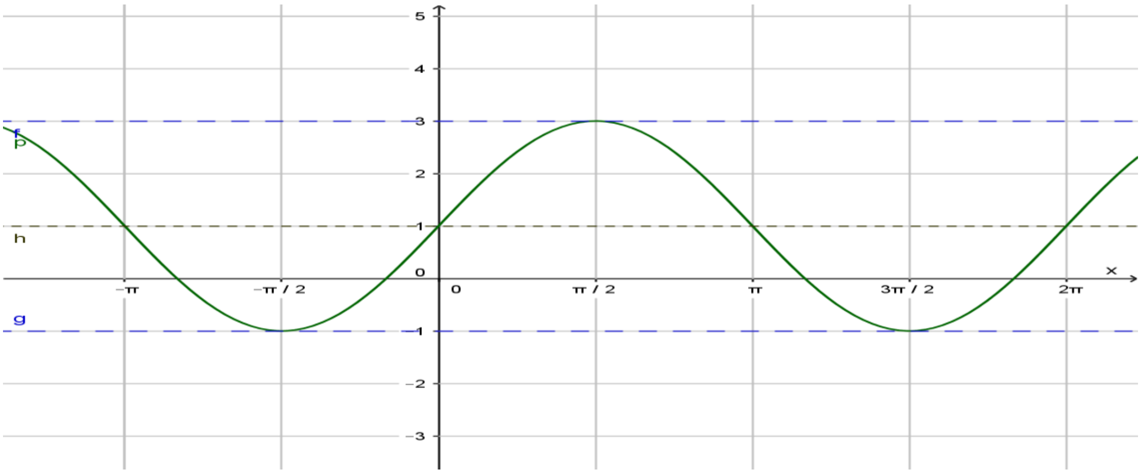
Logo, $I_f = [-1;3]$

O eixo de simetria da onda, é obtido em função da recta $y = A$. Logo é dado pela recta $y = 1$.

A amplitude da onda mede 2.

Período: $P = \frac{2\pi}{|C|} \Rightarrow P = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

Representação gráfica



Trabalho autónomo do Estudante: C

Faça analise das demais propriedades do gráfico acima.

3. Esboce o gráfico da função $f(x) = 2 - 3 \bullet \cos(x)$.

Resolução

$D_f = IR$

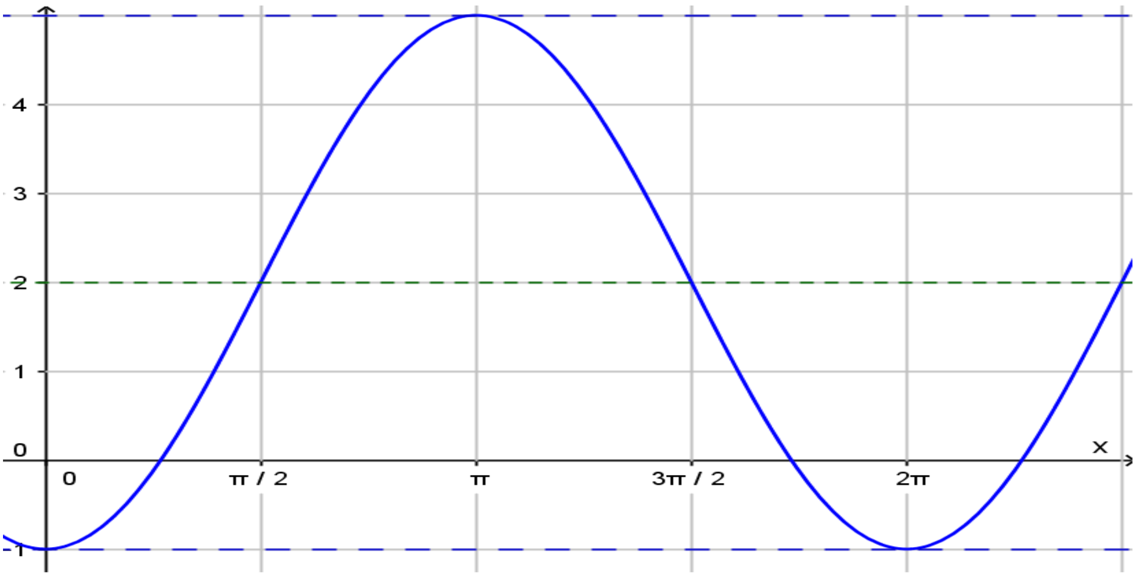
$2 + 3 \bullet 1 = 5$
$2 + 3 \bullet (-1) = -1$ Logo, $I_f = [-1;5]$

O eixo de simetria da onda, é obtido em função da recta $y = A$. Logo é dado pela recta $y = 2$.

A amplitude da onda mede 3.

Período: $P = \frac{2\pi}{|C|} \Rightarrow P = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

Representação gráfica



Trabalho autónomo do Estudante: D

Faça analise das demais propriedades do gráfico acima.

Trabalho autónomo do Estudante: E

Represente graficamente as seguintes funções no mesmo referencial:

a. $y = sen(x)$ e $y = sen(x - \frac{\pi}{4})$

b. $y = \cos(x)$ e $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$

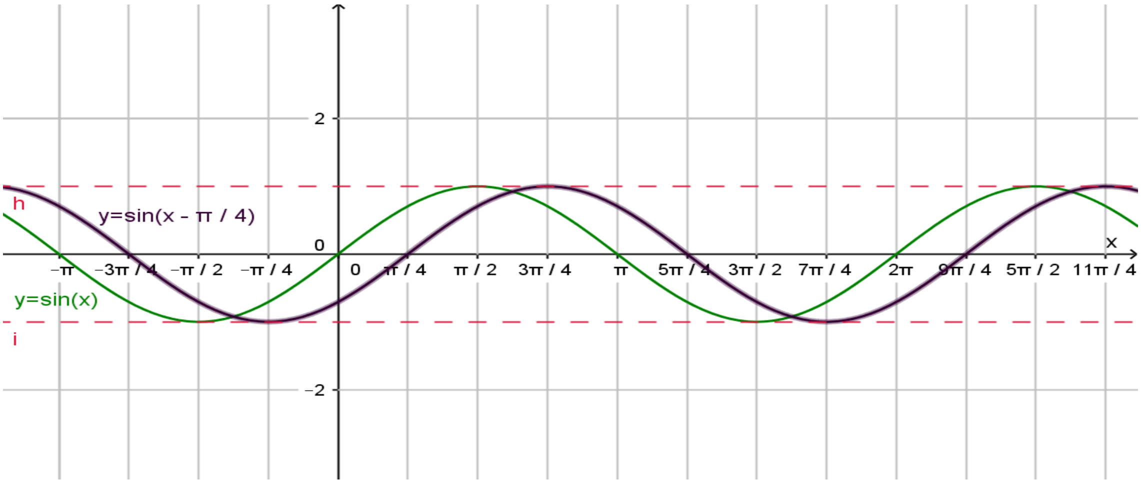
c. $y = sen(x + \pi / 3)$ e $y = 3sen(x + \pi / 3)$

d. $y = \cos(x + \pi / 6)$ e $y = 3\cos(x + \pi / 6)$

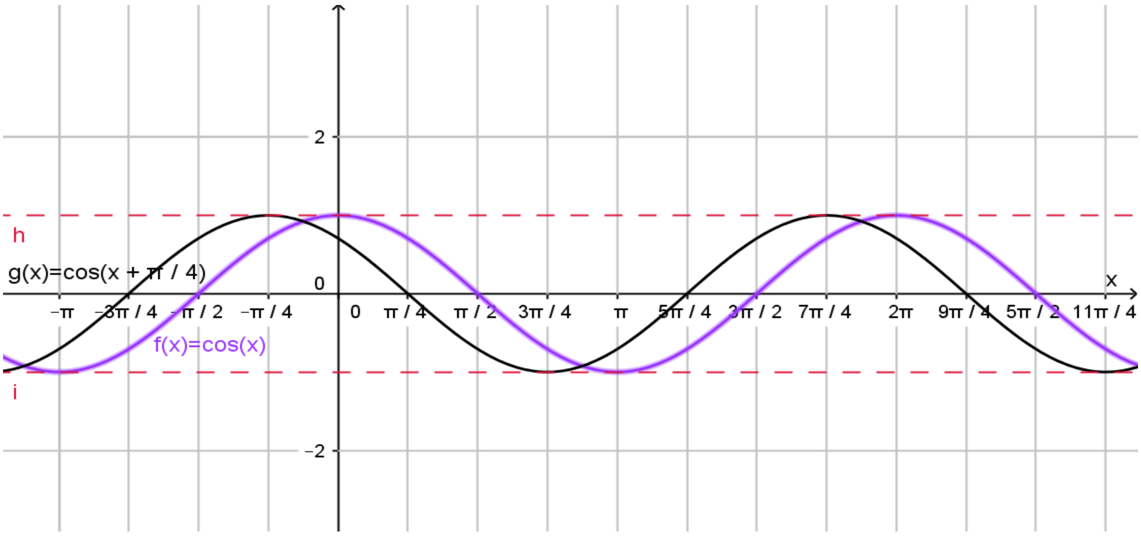
Respostas dos trabalhos autónomos dos Estudantes

Trabalho autónomo do Estudante: E

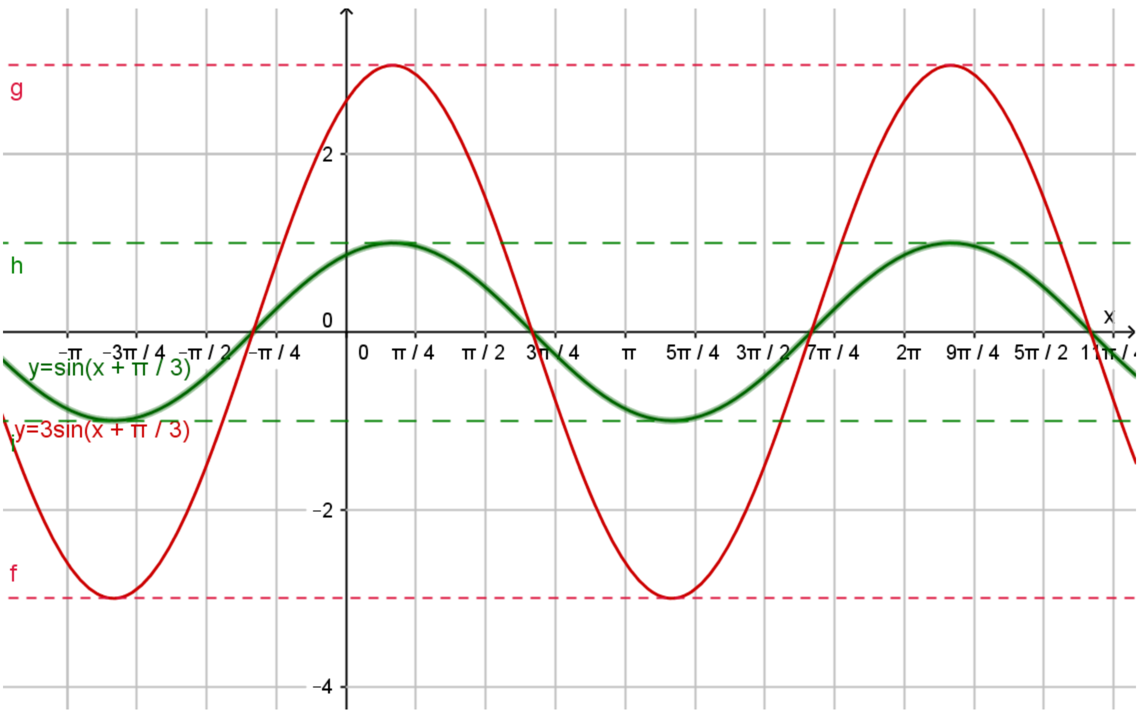
a. $y = sen(x)$ e $y = sen(x - \frac{\pi}{4})$



b. $y = \cos(x)$ e $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$



c. $y = \cos(x)$ e $y = \cos(x + \frac{\pi}{4})$



d. $y = \cos(x + \pi / 6)$ e $y = 3\cos(x + \pi / 6)$

Conclusões

- Este artigo é de vital importância para o aperfeiçoamento de habilidades em temáticas relacionadas ao estudo de funções e não só;
- Os exercícios ora apresentados, apresentam uma graduação, que possibilita a apropriação do conhecimento por parte do estudante;
- As actividades autónomas apresentadas, visam potenciar os estudantes, com ferramentas fundamentais para o desenvolvimento do pensamento lógico, e concomitantemente, as habilidades intelectuais.

Recomendações

- Que o presente artigo, sirva de material de apoio aos estudantes do curso de Ensino da Matemática da Escola Superior Pedagógica do Cuando Cubango e não só;
- Que outros investigadores continuem a investigar estas temáticas, por forma a enriquecer as fontes de consultas;
- Que os leitores deste artigo, façam uma análise critica construtiva, visando a melhoria e enriquecimento do mesmo.

Bibliografia

Demidovitch, B. (1993). *Problemas e Exercícios de Análise Matemática.* Lisboa - Portugal: Escolar Editora.

Maqueira, R., & Mrtínez, C. R. (2003). *Laboratório de Matemática Superior.* La Habana: Editorial Felix Vareira.

Stewart, J. (2009). *Cálculo con Trnscendentes Temperanas.* Habana: Editorial Félix Varela.

Sydsaeter, K., & Hammond, P. J. (2003). *Matemáticas para el Análisis Económico- Volumen I.* La Habana: Editórial Félix Varela.