UNIVERSIDADE AGOSTINHO NETO

FACULDADE DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TRABALHO DE FIM DE CURSO PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE

LICENCIATURA EM CIÊNCIAS MATEMÁTICAS

“OPTIMIZAÇÃO DA REDE DE DISTRIBUIÇÃO DE COMBUSTÍVEL NA REGIÃO SUL”

POR:

Alcides Domingos Cambundo Nº87978

e

João Fernando Sampaio Lino Nº 82212

Ano académico 2015

UNIVERSIDADE AGOSTINHO NETO

FACULDADE DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TRABALHO DE FIM DE CURSO PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE

LICENCIATURA EM CIÊNCIAS MATEMÁTICAS

"OPTIMIZAÇÃO DA REDE DE DISTRIBUIÇÃO DE COMBUSTÍVEL NA REGIÃO SUL"

POR:

Alcides Domingos Cambundo Nº87978

e

João Fernando Sampaio Lino Nº 82212

Orientador: Dr. José António Fazenda (Phd)

Ano académico 2015

Índice

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à Deus, pelo dom da vida, pela força e coragem que concedeu-me para concluir o curso de matemática e por tudo que tem feito em minha vida.

João Fernando Sampaio Lino

Dedico este trabalho a toda minha família, em especial aos meus pais Vicente Alfredo e Luzia Domingos Alfredo, como prova dos ensinamentos, apoio, educação transmitida e por me terem feito conhecer á Cristo!

Alcides Domingos Cambundo

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha mãe Margarida Lino, as minhas tias, Lalá Lino, Fátima Lino e aos meus familiares em geral, que contribuíram directa ou indirectamente para que pudesse concluir este curso. Aos meus colegas e amigos, tal como, Flávio Cacuata, Jorge Nunes, Dionísio Adão, Lídia Pierre,Wilson Timóteo, Bismark Santana e os demais que contribuíram para realização deste trabalho.

Agradeço também ao meu orientador, Dr. José António Fazenda pela disponibilidade, paciência, etc. aos docentes do departamento de Matemática, em particular Dr. May, Dr.Borges, Drª Tha, etc. aos mestres Paulino Quinguengo e Jaime Jerónimo; ao pessoal da sonangol, Rui Contreiras, Aldo Silva, Sr. Catamba, Sr.ª Teresa Assis , Eng.ª Bernarda,Carlos Alves e Domingos Manuel por terem viabilizado a nossa estadia na sonangol para aquisição dos dados para elaboração deste trabalho.

João Fernando Sampaio Lino

Primeiramente agradeço ao Bendito e poderoso Deus, que através do seu amor, poder e sua sabedoria me fez triunfar em meio a tantas adversidades durante o percurso académico.

Agradeço ao meu orientador, Dr. José António Fazenda pela orientação, pelos conhecimentos académicos, valores, virtudes transmitidas e pelos constantes encorajamentos que nos deu ao longo da elaboração deste trabalho.

Agradeço a todo corpo docente do curso de Matemática, aos mestres Paulino Quinguengo e Jaime Jerónimo, a todos os colegas do curso de Matemática em particular, Dionísio Adão, António Pedro, Maurício Cassova, Nelson Cândido, Dalas Muluta, Patrick Pedro e Mário Diniz. Ao pessoal da Sonangol, Rui Contreiras, Aldo Silva, Sr. Catamba, Sr.ª Teresa Assis, Eng.ª Bernarda, Carlos Alves e Domingos Manuel por terem viabilizado a nossa estadia na Sonangol para aquisição dos dados para elaboração deste trabalho. Aos irmãos Manuel de Almeida, Inácio de Almeida, Júlio Meneses, Maindo Sequeira, Laurinda Muhongo, Audo Geraldo e Manuel Rafael. A todo pessoal que de forma directa ou indirecta contribuíram para que este trabalho fosse concretizado, que Deus abençoe a todos!

Alcides Domingos Cambundo

RESUMO

O presente trabalho procura formular um plano viável de distribuição de combustível, mais concretamente da gasolina para a região territorial sul de Angola em caso de algum estrangulamento na estrutura actual, envolvendo as províncias de Benguela, Namibe, Huila, Huambo, Bié, Kuando Kubango e Cunene, com objectivo de criar alternativas para assegurar o processo de distribuição de combustível em caso de algum estrangulamento no sistema actual. Pesquisa realizada na Sonangol, revelam que a rede de distribuição de combustível na região Sul de Angola não garante a distribuição de forma eficaz em caso de algum estrangulamento na rede de distribuição actual. Assim, Neste trabalho, com a concepção de um modelo Matemático estudados em dois cenários, sendo o primeiro caracterizado pela possibilidade de um estrangulamento no percurso TOL-ICKK e o segundo, considerando um possível estrangulamento nos percursos TOL-ICKK e TON-ICL respectivamente, assegura- se haver um plano alternativo em caso de um estrangulamento no sistema actual de distribuição de combustível. A metodologia usada foi a de programação linear, dando ênfase ao problema de transporte.

Palavras-chave: Distribuição de combustível. Modelo Matemático. Programação Linear.

ABSTRACT

This work seeks to formulate a workable plan of fuel distribution, specifically gasoline to the southern territorial region of Angola in the event of a bottleneck in the current structure, involving the provinces of Benguela, Namibe, Huila, Huambo, Bié, Kuando Kubango and Cunene, with the aim to create alternatives to ensure the fuel distribution process in case of a bottleneck in the current system. Research conducted at Sonangol, reveal that the fuel distribution network in southern Angola region does not guarantee the distribution effectively in the event of a bottleneck in the current distribution network. Thus, this work, with the design of a Mathematical model studied in two scenarios, the first characterized by the possibility of a bottleneck in the TOL-ICKK route and the second considering a possible bottleneck in TOL-ICKK routes and TON-ICL respectively, ensured to have an alternate plan in case of a bottleneck in the current system of fuel distribution. The methodology used was the linear programming, emphasizing the transportation problem.

Keywords: Fuel Distribution. Mathematical Model. Linear Programming.

LISTA DE FIGURAS

INTRODUÇÃO

O Petróleo é uma das mais importantes fontes de energia da actualidade, pois é através dele que se possibilita a realização de inúmeras actividades de carácter Sócio-Económico e produtivo. Ele é utilizado principalmente na forma de combustíveis automotivos, como a gasolina, gasóleo e o óleo diesel. Trata-se de uma substância oleosa, altamente inflamável e de coloração negra ou castanho escura, de origem fóssil e não renovável, ou seja, ele poderá deixar de existir com o passar dos anos. Apesar de seu consumo ter diminuído ao longo dos últimos anos, o petróleo ainda é considerado o recurso básico da sociedade industrial contemporânea. É responsável por cerca de 35% do total de consumo de energia no mundo, o que lhe confere a liderança em relação a outras fontes de energia.

O Oriente Médio é a região que abriga as maiores reservas mundiais de petróleo (cerca de 65%), com destaque para a Arábia Saudita, que é a maior produtora mundial. Outros locais onde há grande produção de petróleo são: golfo do México, sul dos Estados Unidos, Lago de Maracaibo (Venezuela), Sibéria (Rússia), Golfo de Bohai (China), Ásia central (região do Cáucaso) e na costa ocidental da África.

Angola apesar de ser o segundo maior produtor de África tem somente uma pequena refinaria em Luanda que não oferece capacidades para satisfazer a demanda do rápido crescimento económico nacional. Por este motivo, o país importa anualmente o equivalente a 250 milhões de dólares de produtos derivados, sendo a Sonangol a empresa responsável na comercialização e distribuição dos mesmos. Constitui proposta da Sonangol desenvolver competências em todos segmentos do mercado em que participa de forma a alcançar uma posição que contribua para o retorno dos capitais investidos e a internacionalização do negócio. Das visitas de estudo realizadas na Sonangol, revelam que a rede de distribuição de combustível na região Sul de Angola não garante a distribuição de forma eficaz em caso de algum estrangulamento na rede, o que constitui uma lacuna, pelo que o presente trabalho propõe subsídios para sua optimização.

Segundo Ballou (2007), o componente de maior importância no custo logístico na maioria das empresas é o transporte. Este contribui com cerca de dois terços do gasto logístico entre 9 e 10% do produto nacional bruto. Devido a isso, é comum se deparar com a afirmação de que os custos logísticos envolvem apenas os custos com transporte.

Por meio do acesso aos meios de transporte com menores custos e com melhores sistemas, a estrutura económica começa a se igualar de uma economia desenvolvida, possibilitando aumento da concorrência no mercado, garantia de economia de escala na produção e redução de preços das mercadorias (BALLOU, 2007).

A Matemática, mais precisamente a área de investigação operacional tem dado importante contributo na resolução de problemas nos domínios da economia, indústria, engenharia civil, na gestão de organizações, etc. Moreira (2007) salienta que no caso dos modelos matemáticos, as relações entre as variáveis do problema devem ser representadas por sistemas de símbolos e relações matemáticas". Os bons modelos serão os mais próximos da realidade e de fácil experimentação.

Bueno (2007, p.19) afirma que as representações com modelagem matemática ou simbólica, são formadas por variáveis de decisão (parâmetros para tomada de decisão) e expressões matemáticas (relações entre as variáveis). Essas representações darão suporte à decisão por retratar um problema real.

A Pesquisa Operacional, especificamente, oferece aos gerentes a capacidade de tomar decisões mais eficazes e de estabelecer sistemas mais produtivos, por meio de informações mais completas, realizam-se previsões cuidadosas de resultados e estimativas de risco com ferramentas actuais e técnicas de decisão (MOREIRA, 2007).

Sendo assim, a proposta deste trabalho é de encontrar um plano que sirva de alternativa na distribuição de combustíveis (gasolina) para região territorial sul, e estabelecer um modelo matemático aplicável na gestão da distribuição e transportação dos mesmos, com objectivo de minimizar o custo da transportação destes derivados do petróleo.

Portanto, o presente trabalho organiza-se à volta de três capítulos. O primeiro diz respeito a Metodologia geral, em particular, os meios e as tarefas empregues para abordagem do tema, o segundo relaciona-se com a fundamentação teórica-matemática do problema, o terceiro abordará sobre o caso de estudo do problema da distribuição de combustível na região sul, por fim, a conclusão geral e recomendações

CAPÍTULO I: METODOLOGIA GERAL

1.1-OBJECTIVOS GERAIS

- Criar um modelo Matemático que estruture um plano que optimize o processo de distribuição de combustível (gasolina), na região Sul de Angola em caso de algum estrangulamento na situação actual da distribuição do mesmo.

- Determinar a forma mais económica de transportar combustível (gasolina) de um conjunto de fontes de oferta para um dado conjunto de destinos ou fontes de procura.

1.2-OBJECTIVOS ESPECÍFICOS

- Compreender o sistema actual de distribuição de combustível na região Sul de Angola.

- Construir um modelo matemático baseado no algoritimo dos transportes que optimize a distribuição em caso de estrangulamento na estrutura actual da região Sul de Angola.

- Criar alternativas de decisões a tomar para garantir o bom funcionamento do processo de transportação e distribuição de combustível na região Sul de Angola.

1.3-CAMPO DE ACÇÃO

Este trabalho será desenvolvido com base numa das actividades da subsidiária Sonangol logística do Grupo Sonangol-EP, na rede de distribuição e transportação de combustível (gasolina) na região Sul de Angola, especificamente no T.O.L (Terminal Oceânico do Lobito), que distribui para Huambo, Bié e Kuando Kubango; T.O.N (Terminal oceânico do Namibe), que distribui para Lubango e Cunene.

1.4-PERGUNTAS CIENTÍFICAS

- Como identificar as causas das possíveis roturas na actual estrutura de distribuição de combustível na região Sul de Angola?

- Que métodos algébricos podem viabilizar a modelação que contribua para a distribuição de combustível em caso de algum estrangulamento na estrutura de distribuição de combustível na região Sul de Angola?

- Quais serão os benefícios para a sociedade e a Sonangol com aplicação do modelo alternativo que o presente trabalho se propõe construir?

1.5-TAREFAS CIÊNTÍFICAS

•Pesquisas bibliográficas e recolha de dados na Sonangol sobre a situação actual da distribuição de combustível na região sul de Angola.

•Concepção e montagem do modelo matemático, avaliação dos resultados obtidos, para possível tomada de decisão.

•Interpretação das alternativas propostas

1.6- JUSTIFICATIVA:

•A Investigação Operacional oferece a capacidade aos gerentes de tomar decisões mais eficazes, e de estabelecer sistemas mais produtivos que usam os recursos materiais, financeiros, humanos e ambientais. Sendo assim, aproveitamos este ramo da Matemática aplicada para propor a Sonangol utilizar esta ferramenta, para optimizar as suas operações de distribuição de combustíveis com a finalidade de melhor realização de suas estratégias, visando aumentar a eficiência das suas actividades e minimizar custos.

•A óptima distribuição de combustível dinamiza o processo de industrialização de uma sociedade, que por sua vez é um factor preponderante no desenvolvimento da economia e bem-estar da comunidade em geral.

1.7-METODOLOGIA USADA

1.7.1-AMOSTRA USADA PARA O ESTUDO

Observando o interesse académico da temática a desenvolver, houve a necessidade de delimitar o tema regionalmente, assim, para o estudo da distribuição de combustível consideramos uma amostra de 7 províncias nomeadamente: Benguela, Namibe (Origens); Huambo, Bié, Kuando Kubango, Huíla e Cunene (Destinos), cujo campo de acção é o T.O.L. (Terminal Oceânico do Lobito)e T.O.N (Terminal Oceânico do Namibe) A região extraída para amostra é a parte sul do território nacional.

1.8-MÉTODOS

•Teóricos

Baseamo-nos em trabalhos de fim de cursos já realizados de investigação operacional e não só, como também em outras áreas da Matemática, assim como diversas Pesquisas bibliográficas, isto é, consultas de livros, artigos científicos, trabalhos de fim de curso de licenciatura relacionado com o tema, pesquisas via internet em sites relacionados com o assunto.

•Empíricos

Recolha de dados na Sonangol sobre a situação actual da distribuição de combustíveis na região sul, entrevista ao pessoal da sonangol dos departamentos de planeamento e logística, aprovisionamento e de supervisão.

•Matemáticos

Os métodos Matemáticos usados são os de álgebra linear, isto é, matrizes e sistemas de equações; técnicas de demonstrações matemáticas assim como modelos matemáticos do problema de transporte e o algoritmo de Modi

1.9-TÉCNICAS

Utilização das técnicas de álgebra linear sobre transformações elementares de matrizes, resolução de sistemas de equações; técnicas de demonstrações matemáticas; utilização do solver da folha de cálculo Excel para determinar a solução óptima do problema de distribuição, software Winplot e Advanced Grapher para elaboração de gráficos; análise, comparação exaustiva e inferência dos dados obtidos na Sonangol perante os resultados encontrados na solução do modelo.

CAPÍTULO II: FUNDAMENTOS TEÓRICOS SOBRE A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

2.1-FUNDAMENTOS DA CONCEPTUALIZAÇÃO DO TERMO "PROBLEMA".

Entre as várias definições existentes podem encontrar-se:

"Situação inerente a um objecto, que determina uma necessidade em um sujeito, o qual desenvolve uma actividade para transformá-la" (Álvarez, C.1995).

"Uma tarefa difícil para o individuo que está tratando de resolve-la" (Schoenfeld, A. 1985).

"É uma situação em que se tenta alcançar um objectivo e se torna necessário encontrar um meio para consegui-lo" (Chi, M., Glaser, R. 1986).

"Uma tarefa cujo método de realização e resultado são desconhecidos, mas possuindo os conhecimentos e habilidades necessárias, se está em condições de atacar na procura dos resultados do método que há de se aplicar" (Barrios, S.1987).

"Situações matemáticas provenientes de diversos campos do conhecimento e que esboçam alguma interrogante que não tenham tido resultado pela mesma categoria específica que enfrenta" (Bofil, Flores e Rodríguez, 1995).

"Situação nova, surpreendente, de ser possível, interessante ou inquietante, em que se conhece o ponto de partida e de chegada, para os processos mediante os quais se pode chegar. É uma situação aberta que admite várias vias de solução" (Pozo, A. 1995)

"Um problema em matemática pode definir-se como uma situação que enfrenta um indivíduo ou um grupo, para a qual não se vislumbra facilmente um caminho aparente ou óbvio que dirija para a solução deles. Por esta razão, da resolução de problemas deve apreciar-se como a razão de ser da tarefa matemática, um meio poderoso de desenvolver o conhecimento matemático e uma realização indispensável para uma educação que pretenda ser de qualidade".

Como se pode observar, todas estas definições enfatizam os aspectos que seus autores querem destacar por algum motivo, mas em cada uma há elementos importantes que o caracterizam, como são:

1.Existência de uma dificuldade que não tem solução imediata.

2.Ausência de um caminho conhecido.

3.Presença de um interesse por resolver a dificuldade.

4.Demanda de una intensa actividade cognoscitiva.

5.Carácter objectivo, subjectivo e relativo do problema.

Um problema matemático "é um exercício que reflecte, determinadas situações através de elementos, relações do domínio das ciências e da prática, em linguagem comum e exige de meios matemáticos para sua solução; se caracteriza por ter uma situação inicial (elementos dados) conhecida e uma situação final (incógnita, elementos buscados) desconhecida, enquanto sua via de solução também desconhecida, se obtêm com ajuda de procedimentos heurísticos". (Ballester, 1992: 407)

2.2-TENDÊNCIAS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

O processo de resolução de problemas no âmbito da Matemática tem estado condicionado pelo contexto histórico, o fenómeno da educação como expressão da superstrutura da sociedade.

Na obra de (Delgado, 1999): "Do ensino da resolução de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentais para alcançar sua eficácia: A estruturação sistemática do conteúdo de estudo e o desenvolvimento das habilidades gerais matemáticas" se apresenta uma cronologia relativa a resolução de problemas moldado em três etapas fundamentais, desde a antiguidade até 1945 (ano em que os trabalhos de Polya G. marcam uma pauta a este fenómeno), desde 1945 até 1980, e desde 1980 até a actualidade, tomando como referencias, a declaração da National Council of Supervisors of Mathematics dos EE.UU. (1977), na qual se expressa que "aprender a resolver problemas é a razão principal do estudo da matemática".

Em cada uma destas etapas, ao estudar o papel da resolução de problemas e as estratégias empregues para seu tratamento, se reconhece que se realiza de três formas, tendências ou enfoques fundamentais segundo sua denominação que em obras tais como: (Campistrous, 1998), (Vilanova, 1999), (Gaulin, 2001), ou em tese doutoral como as de (Delgado, 1999), (Llivina, 1999), (Jiménez, 2000), (Ferrer, 2000), (Rebollar, 2000) y (Alonso, 2001), entre outros.

2.2.1 RESOLVER PROBLEMAS COMO CONTEXTO

A partir desta concepção, os problemas são utilizados como veículos ao serviço de outros objectivos curriculares, representando as seguintes, relações em (Vilanova, 1999):

Como uma justificação para o estudo da matemática: pelo menos alguns problemas relacionados com experiencias de vida quotidiana são tratados para mostrar o valor da matemática.

Para prover especial motivação a certos temas: os problemas são frequentemente usados para introduzir temas, como convencer implícita ou explicitamente para favorecer o tratamento de um determinado assunto.

Como actividade recreativa: mostram que a matemática pode ser "divertida" e que há casos divertidos para os conhecimentos matemáticos.

Em qualquer destas formas, os problemas são usados como meios para algumas destas metas; ou seja, a resolução de problemas não é vista como uma meta em si mesmo, senão como facilitadora da realização de outros objectivos.

Segundo o doutor espanhol Juan António Garcia Cruz em (Garcia e outros, 2000), esta interpretação se refere a proposição de mais problemas aos estudantes, usar aplicação dos problemas da vida diária das ciências, geralmente na final das unidades temáticas.

Este enfoque de emprego da resolução de problemas é muito importante para as Matemáticas Superiores, sobre tudo nos cursos de engenharias, já que permite enfrentar problemas com contextos provenientes do perfil dum licenciado, nesses que necessitam aplicar os métodos e/ou procedimentos estudados para poder resolve-los e interpretar suas soluções em contexto de onde eles surgiram; não obstante, este não deve ser o único foco a usar, pois também devem formular-se, com um papel activo dos sujeitos intervenientes no seu tratamento e quando for necessário deverão realizar-se intercâmbios encaminhados a fazer consciência destes sujeitos sobre os passos que vão decorrendo durante a solução dos problemas e dos níveis de avanço que eles vão tendo.

2.2.2 RESOLVER PROBLEMAS COMO HABILIDADE

A resolução de problemas é frequentemente vista como uma de muitas habilidades a serem ensinadas no currículo. Ela compreende os seguintes passos:

Compreender o problema

Questões como:

Qual é a incógnita? Quais são os dados? Qual é a condição? É a condição suficiente para determinar a incógnita? É insuficiente? Redundante? Contraditória?

•**Conceber o plano**

Já se deparou com um problema semelhante? Se sim, esboce-o de uma forma ligeiramente diferente?

Conhece algum problema relacionado a este? Conhece algum teorema que o mostre ser útil? Olhe atentamente à incógnita e tente recordar um problema familiar que tenha a mesma incógnita ou uma incógnita similar.

Há um problema relacionado já resolvido? Você poderá usá-lo? Poderá utilizar seu resultado? Poderá empregar seu método? O que faria se faltasse introduzir
algum elemento auxiliar a fim de poder utilizá-lo a seguir?

Poderia enunciar o problema de outra forma? Poderia esboçar de forma diferente novamente? Refira-se das definições.

Se não pode resolver o problema proposto, trate de resolver primeiro algum problema similar. Poderia imaginar um problema análogo um tanto mais acessível? Um problema geral? Um problema particular? Um problema análogo? Pode resolver uma parte do problema? Considere só uma parte da condição; descarte a outra parte; Em que medida a incógnita agora determina? Em que forma pode variar? Pode deduzir algum elemento útil dos dados? Pode pensar em alguns outros dados apropriados para determinar a incógnita? Pode trocar a incógnita? Pode trocar a incógnita, os dados ou ambos se necessário, de tal forma que a nova incógnita e os novos dados estejam mais próximo entre si?

Foram usados todos os dados? Foram empregues todas condições? Foram consideradas todas noções essenciais concernentes ao problema?

•**Executar o plano**

Comprove cada um dos passos, ao executar seu plano da solução. Pode verificar claramente que o passo é correcto? Pode demonstrá-lo?

•**Examinar a solução obtida.**

Pode verificar o resultado? Pode verificar argumentando? Pode obter o resultado em forma diferente? Pode ver isto de novo? Pode empregar o resultado ou o método em algum outro problema?

Depois de George Polya a quantidade de modelos propostos formam uma ampla lista: Fridman (1979), Jungk (1982), Zillmer (1981), Mason (1989), Schöenfeld (1985), Bell, T. (1992), Horst (1990), De Guzmán Ozámiz, (2005), Algarabel (1996), Rivero Pérez (2002), entre outros. De maneira que, a tarefa de avaliar tudo e sintetizar suas características essenciais, satisfazer outros pontos de vistas e até preferências dos leitores, sem excluir a possibilidade de que se escape algum modelo pontualmente localizado dentro da grande rede de informação, resulta de uma tarefa tendente ou impossível.

Por tais motivos se toma o modelo de George Polya como paradigma para este trabalho porque, sendo clássico, mantém sua vigência e simplicidade, e como pivô sobre ele se critica isto ou supera todos outros.

A relevância do modelo de Schoenfeld, que ao mesmo tempo ele o torna mais complexo, ao considerar quatro categorias necessárias para a compressão de forma em que os alunos resolvem os problemas: Recursos cognitivos, Estratégias heurísticas, Estratégias metacognitivas e sistema de convicções.

2.3-ADECUAÇÃO DO MODELO DE POLYA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

Não obstante a pertinencia demostrada do Modelo de Polya para a resolução de problemas matemáticos, a resolução de problemas de optimização em Investigação Operacional pode ser reformulada em função da linguagem e a terminologia que se emprega neste tipo de problemas.

Nestas circunstancias se considera o modelo proposto em (Castillo, 2001), cujas primeiras quatro fases são respectivamente semelhantes as propostas no modelo de Polya, e se soma uma quinta fase, propria dos investigadores, que enfrentam problemas de optimização reais e devem, não só interpretar a soluão obtida do problema na realidade donde surgiu, mas implementar os resultados obtidos na prática.

Em essência, as fases que se propõe (Castillo, 2001) para a solução de problemas de Investigação Operacional são:

1-Formulação e definiçaõ do problema de optimização

2-Construção do modelo

3-Solução do modelo (métodos, algoritmos, implementação computacional)

4-Validação do modelo

5-Implementação de resultados

Em seguida se mostra uma breve explicação de cada uma das fases:

1-Formulação e definição do problema de optimização: Nesta fase do processo é necessário fazeruma descrição dos objectivos do contexto, quer dizer o que se deseja optimizar;

identificar as variáveis implicadas, sejam elas controláveis ou não;

determinar as restrições do sistema.

Também há que se ter em conta as alternativas possiveis de decisão a tomar e as restrições para produzir uma solução adequada.

2-Construção do modelo: Nesta fase, o investigador de operações deve decidir o modelo a utilizar para representar o sistema (contexto). Deve ser un modelo tal que a relação das variáveis de decisão com os parámetros e restrições do sistema seja clara. Os parámetros (ou quantidades conhecidas) se podem obter já, seja a partir de dados históricos ou serem estimados por meio de algum método estatístico.

3-Solução do modelo: Uma vez que se tem o modelo, se procedea solução matemática empregando as diversas técnicas e métodos matemáticos para resolver problemas e equações. Deve se ter em conta que as soluções que se obtem neste ponto do processo, são matemáticas e se devem ser interpretadas no mundo real. Também, para a solução do modelo, se devem realizar análises de sensibilidade, quer dizer, ver como se comporta o modelo ao existir troca nas especificações e parámetros do sistema. Isto é feito, devido a que os parámetros não são necessáriamente precisos e as restrições podem estar equivocadas.

4-Validação do modelo: A validação de um modelo significa determinar se esse modelo pode predizer com certeza o comportamento do sistema. Um método comum para provar a validez do modelo, é sujeitar isto a dados passados disponiveis do sistema actual e observar a reprodução das situações passadas do sistema. Mas como não há segurança de que o comportamento futuro do sistema continue replicando o comportamento passado, então sempre se deve estar atento as possiveis trocas, para poder ajustar ou reformular o modelo, para então voltar a soluciona-lo e continuar com o resto dos passos.

5-Implementação dos resultados: Uma vez que se tenha obtido a solução, o último passo do processo é implementar esses resultados e dar conclusões e indicações de acção para a optimização do sistema. Se o modelo utilizado pode servir a outro problema, é necessário revisar, documentar e actualizar o modelo para suas novas aplicações.

Uma representação esquemática deste modelo é:

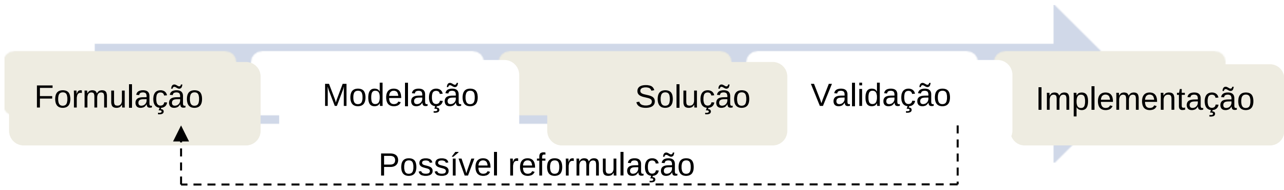


Figura 1: Esquema da resolução de problemas

2.4-ÁLGEBRA LINEAR VERSUS PROGRAMAÇÃO LINEAR

A inclusão desta secção neste capítulo, tem como propósito fundamental, em forma resumida e clara, realçar a aplicabilidade da Álgebra linear na resolução dos problemas de optimização do dia-a-dia.

Em programação linear se desenvolvem técnicas e métodos para tratar os problemas de optimização, que se modelam mediante um sistema de restrições e uma função, que é a que queremos optimizar, ambas lineares.

Em particular, em análise matemática I, estuda-se problemas de optimização aplicando os métodos de substituição e de multiplicadores de Lagrange, os quais só se podem implementar no caso de funções com extremos ordinários, o qual constitui uma limitação. Os métodos de programação linear se aplicam só a problemas de optimização linear, que não apresentam a limitação mencionada anteriormente. Problemas deste tipo são os seguintes:

Problema 1

Uma alimentação económica para gados deve conter obrigatoriamente quatro tipos de componentes nutritivos A, B, C e D. A indústria alimentar produz dois alimentos M e N, que contem estes componentes. Um kg de alimento M contem 100 gr de A, 100 gr de C, e 200 gr de D; um kg de alimento N contem 100 gr de B, 200 gr de C e 100 gr de D. Um animal deve consumir diariamente, quando menos, 0,4kg de A; 0,6kg de B, 2kg de C e 1,7kg de D. O alimento M custa $ 10.00 por kg e N custa $ 4.00 por kg. Que quantidades de alimentos M e N se devem utilizar diariamente por animal, para poder realizar a alimentação adequada em forma menos custosa?

2.4.1-OS PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Em geral, um problema de programação linear se pode descrever da seguinte maneira:

Dado um sistema de m equações ou enequações lineares com n variáveis incógnitas, o problema consiste em achar soluções não negativas do sistema que optimize determinada função linear das n variáveis incógnitas.

As equações ou enequações lineares do sistema se denominam restrições e a função que se deseja optimizar se chama função objectivo.

Em outras palavras, o problema consiste em maximizar ou minimizar uma certa função linear $f(x_1, x_2,\ldots,x_n)$que por ser linear se pode expressar em forma $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$, com este sistema o sistema de restrições: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n\{\leq, =, \geq\}b_i$ para todo $i = 1, \ldots, m\ e\ x_j \geq 0$ para todo $j = 1, \ldots, n$. A restrição $x_j \geq 0$se denomina restrição de não negatividade.

Os coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$são números reais e os sinais$\{\leq, =, \geq\}$ significam que as restrições podem estar dadas em qualquer das seguintes formas:

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i$

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i$

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i$

Uma forma abreviada de expressar um sistema de restrições tem sido a utilização do símbolo de somatório. Assim, da primeira das formas anteriores resulta:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

As soluções do problema que satisfaçam todas as restrições se denominam soluções factíveis, se ademais, optimizam a função objectivo se chamam soluções factíveis óptimas.

O objectivo de resolver um problema de optimização é investigar se existem soluções factíveis óptimas e em caso afirmativo, determiná-las.

Em particular, um problema de optimização que se descreve mediante um sistema de equações ou inequações lineares com duas ou três restrições, se pode resolver graficamente, como mostraremos no seguinte exemplo:

Exemplo 1

A modelação matemática de um problema é:

$max. Z = 2x_1 + x_2$ (1)

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \leq 15 & (2) \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 10 & (3) \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0$ (4)

Representaremos as restrições em um sistema de coordenadas cartesiano. As restrições $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ representam o primeiro quadrante (ver figura 2)

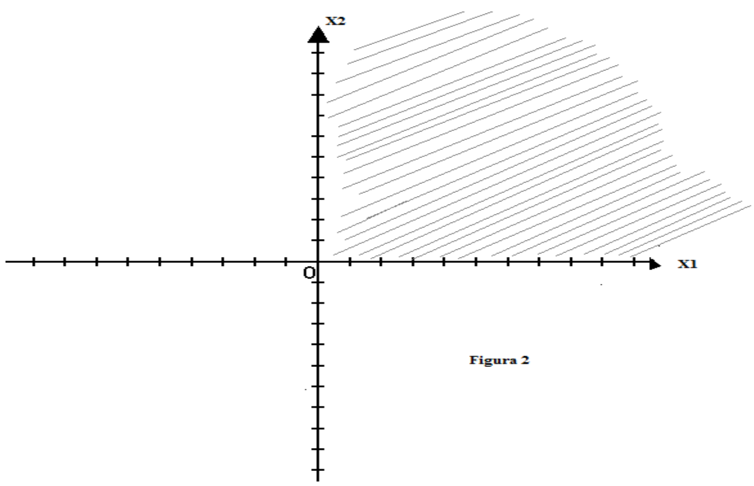
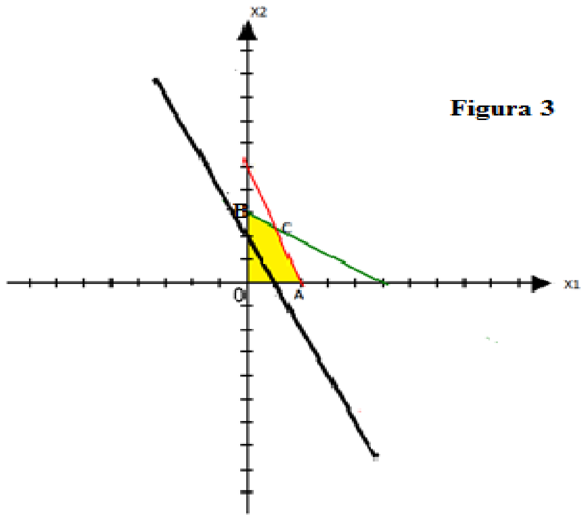


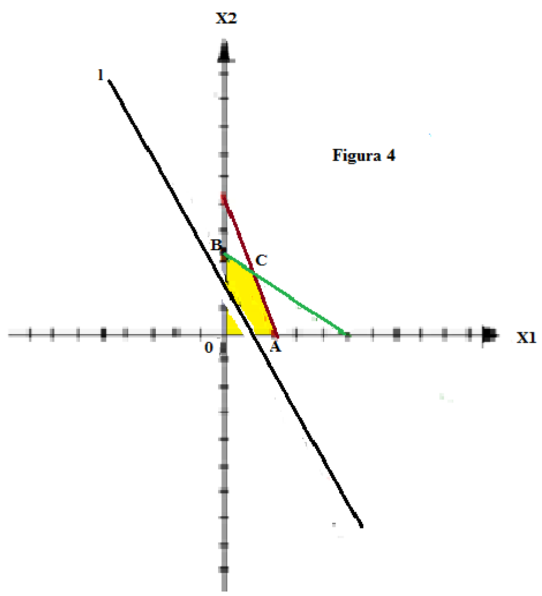
Figura 2

Observe-se que, cada restrição representa um semi-plano e que ambas $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$ representam a intersecção de dois semi-planos. As restantes restrições representam analogamente outros semi-planos.

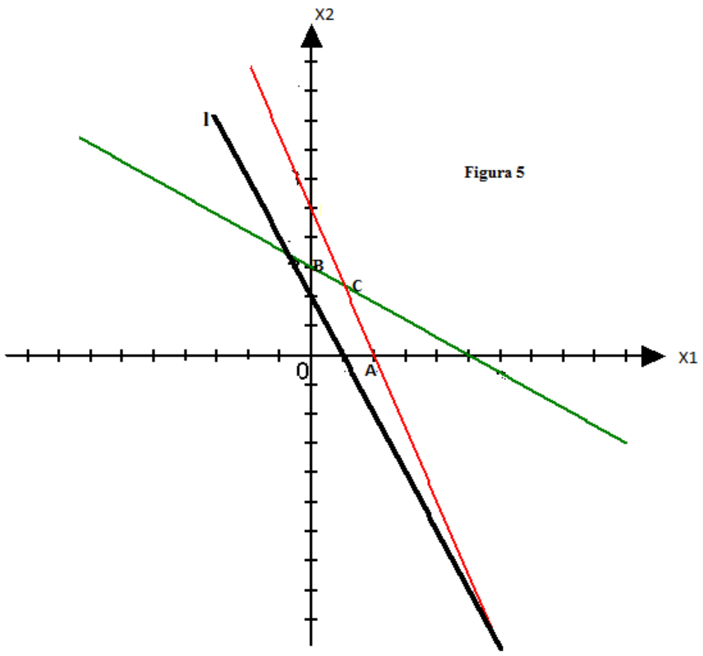


A região do plano OACB, sombreada na figura 3,representa o conjunto de soluções factíveis deste problema. Teremos que achar agora as soluções factíveis óptimas, que serão as que optimizem a função objectivo: $Z = 2x_1 + x_2$.

Observe-se que para cada valor de Z constante Z = k, a equação $2x_1 + x_2 = k$ representa uma recta. Escolhamos um valor de k tal que dessa recta intersecta a região sombreada. Seja k=2; a equação da recta l é $2x_1 + x_2 = 2$.(ver figura 4)



Os pontos sobre a recta l que pertencem a região sombreada OACB, são as soluções factíveis que dão a função objectivo o mesmo valor Z=2. Se queremos achar o valor máximo da função objectivo Z sobre a região sombreada, façamos variar o valor de k, ou que é o mesmo, transladarmos a recta l até ocupar a posição do ponto c que representará a solução factível óptima do problema proposto. (ver figura 5)



Pode-se resolver agora gráficamente o problema 1, proposto no início desta secção.

Problema 1. Solução:

Sejam x_1 e x_2 as quantidades de alimentos M e N respectivamente, que há de se administrar diariamente a cada animal. A função objectivo neste caso é:

Min.$Z = 10x_1 + 4x_2$

Sujeito ao sistema de restrições:

$$\begin{cases} 0{,}1x_1 \geq 0{,}4 \\ 0{,}1x_2 \geq 0{,}6 \\ 0{,}1x_1 + 0{,}2x_2 \geq 2 \\ 0{,}2x_1 + 0{,}1x_2 \geq 1{,}7 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0$

Este modelo Matemático equivale também ao seguinte:

Min.$Z = 10x_1 + 4x_2$

Sujeito ao sistema de restrições:

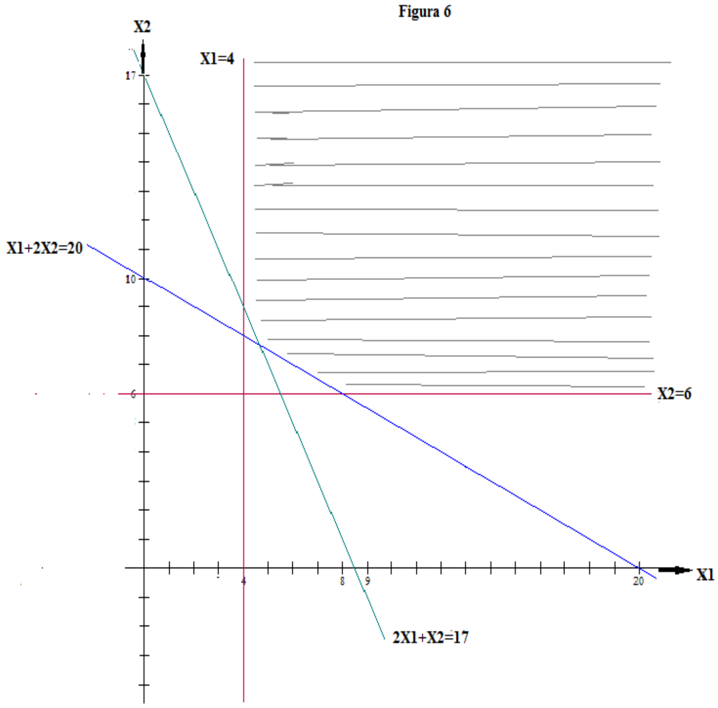
$$\begin{cases} x_1 \geq 4 \\ x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \geq 20 \\ 2x_1 + x_2 \geq 17 \end{cases}$$

$x_1, x_2 \geq 0$

Representemos as restrições em um sistema de coordenadas cartesiano.

Na figura 6, a região sombreada representa o conjunto de soluções factíveis deste problema.

Figura 6

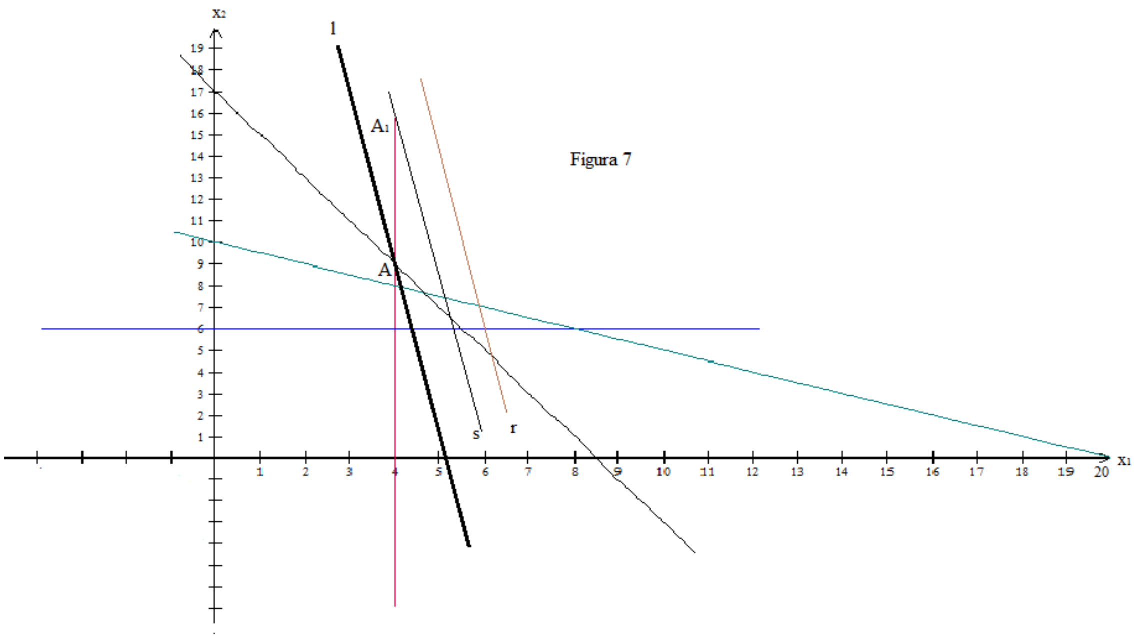


Para achar as soluções factíveis, que sejam as que optimizem a função objectivo $Z = 10x_1 + 4x_2$, façamos Z=k.

A equação $10x_1 + 4x_2 = k$ representa uma recta para cada valor de k (ver figura 7).

Os pontos sobre as rectas r, s etc., para distintos valores de k, que pertençam a região sombreada, são as soluções factíveis que dão a função objectivo o valor de k correspondente.

O ponto A_1 representa uma destas soluções factíveis, pelo que não é o óptimo:



Se queremos achar o valor mínimo da funçao objectivo Z,transladamos a recta até ocupar a posição da recta l pelo ponto A, que representa a solução factível óptima do problema proposto. O ponto A de coordenadas $x_1 = 4\,, x_2 = 9$ é a solução óptima buscada.

Agora bem, os problemas de optimização não se podem resolver gráficamente quando o número de incógnitas é maior que três, o qual é frequente; portanto, é necessário estudar um conjunto de definições que fundamentam um método que permita resolver estes problemas.

2.4.2-CONJUNTOS CONVEXOS

As definições que serão apresentadas nesta secção são necessárias para encontrar vias de solução analítica aos problemas levantados.

Definição 2.1- Conjunto Convexo

Um subconjunto X de R^n é um conjunto convexo , se qualquer que sejam x_1 e x_2 de X, o segmento x_1x_2 que os une está completamente incluido no subconjunto X.

Dizer que, X será um conjunto convexo significa que x_1 e x_2 pertencem a X, quaisquer que sejam λ_1 e λ_2 números reais não negativo e tais que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, entao $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ pertence a X. A tais combinações lineares se denominam combinações lineares comvexas.

Na figura 8 a) e 8 b) se mostra gráficamente exemplos de conjuntos convexo e não convexos.

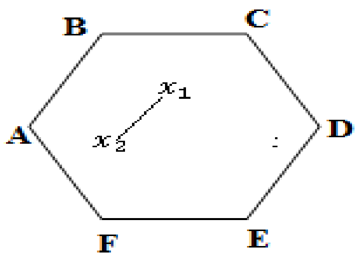


Figura 8 a)

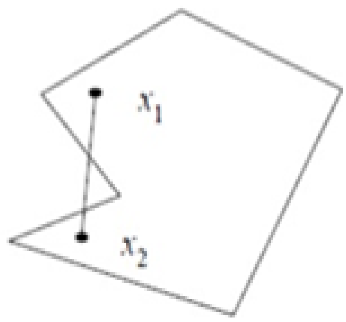


Figura 8 b)

Cada um dos segmentos AB,BC,…,FA, se denomina aresta do conjunto convexo.

Exemplo 2

As rectas e semi-planos são conjuntos convexos.

Apresentaremos em seguida algumas propriedades e teoremas importantes dos conjuntos convexos.

Teorema 2.1:O conjunto **S**, de todas as soluções factíveis do modelo de Programação Linear, é um conjunto convexo".

Demonstração**:** é suficiente mostrar que:

i) $\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \in$**S**;

ii)$\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \geq 0$.

Para se mostrar i) basta notar que,

Se$X_1 \in$**S** e $X_2 \in$**S** $\Longrightarrow$ $\mathrm{Ax}_1 = \mathrm{b}$ e $\mathrm{Ax}_2 = \mathrm{b}$; Assim, A $(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2)$ =A$\lambda X_1 + (1-\lambda)AX_2$= λb $+ (1-\lambda)$b. Logo, A $(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2)$ = b

Para se mostrar ii):$X_1 \geq 0$ e $X_2 \geq 0$ $\Longrightarrow \lambda X_1 \geq 0$ e $(1-\lambda)X_2 \geq 0$; assim temos que $\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \geq 0$.

Logo, $\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \in$S, portanto, S é convexo.

Definição 2.2-Pontos Extremos

Um ponto x é um ponto extremo de um conjunto convexo X, se não existem pontos X_1 e X_2 de X, $X_1 \neq X_2$, tais que x está no interior do segmento de recta X_1X_2.

Exemplo 3

No conjunto convexo representado na figura 9, os únicos pontos extremos que existem são os vértices do triangulo ABC.

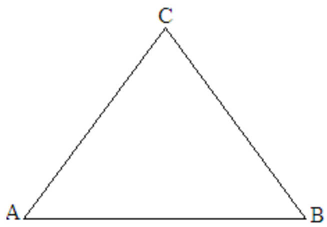


Figura 9

Definição 2.3- Pontos Extremos Adjacentes

Dois pontos extremos distintos x_1 e x_2 de um conjunto convexo X são pontos extremos adjacentes, se o segmento de recta que os une constituem uma aresta do conjunto convexo.

No exemplo 3, todos os pontos extremos são adjacentes (ver figura 9)

O conjunto convexo representado na figura 8 a), os pontos A e B e os pontos B e C são pontos extremos adjacentes, e os pontos A e C, não são.

Variáveis de folga e de excesso

Analisemos agora, o problema de resolução de um sistema de restrições:

$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n\{\leq, =, \geq\}b_i(i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$

É óbvio que, é muito mais conveniente trabalhar com equações do que com inequações. Com o fim de trabalhar com equações introduziremos variáveis adicionais, chamadas variáveis de folga e de excesso com efeito, se termos a restrição:

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_i$ (1)

$(i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$.

Definimos uma nova variável $x_{n+i} \geq 0$ da forma $x_{n+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$. Então a equação pode ser expressa na forma: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i$. x_{n+i} é uma variável de folga.

Analogamente, se termos a restrição: $\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j \geq b_k$ (2)

$(k = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n)$, definimos uma nova variável $x_{n+k} \geq 0$ da forma:

x_{n+k}=$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - b_k$ e obteremos uma equação da forma:

$\sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j - x_{n+k} = b_k$. x_{n+k}é uma variável de excesso.

2.4.3-REPRESENTAÇÃO STANDARD DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Mais adiante trbalharemos com problemas expresso na denominada forma standard, cuja representação matricial é: AX=b, X≥0 max.(min.) CX, onde A é uma matriz de ordem $m \times n$ e X é uma matriz de ordem $n \times 1$.

Suponhemos em seguida que o rango da matriz A é m $(r(A) = m)$ e que $m < n$; o que significa que no sistema de equações não há equações linearmente dependentes de outras equações do sistema e que este sistema tem mais do que uma solução.

Como sabemos, mediante a representação matricial AX = b, é possível associar a estes problemas dois espaços vectoriais: o espaço vectorial R^mque contém em particular os vectores coluna a_j da matriz A $(j = 1, \dots, n)$ e o espaço vectorial R^n que contém em particular os vectores solução de X.

A seguinte definição será de grande utilidade no que se segue.

Definição 2.4: Dado um problema de programação linear expresso em forma standard AX=b; X≥0, max.(min.) CX onde A é de ordem $m \times n$ e $r(A) = m$, se diz que uma submatriz B de A é uma base, se B é de ordem m não singular.

É dizer que, B está formada por m colunas linearmente independentes, que podemos identificar com uma base do espaço vectorial R^m.

2.4.4-SOLUÇÃO FACTÍVEL BÁSICA

Formularemos a continuação, da definição de solução factível básica.

Definiçao 2.5:Dado o problema de programação linear em forma standard max(min.) CX sujeito a AX= b, X≥0, onde A é de ordem $m \times n(m < n)$ e $r(A) = m$; uma solução factível X do problema é uma solução factível básica, se ao menos $n - m$ incógnitas tomam o valor zero.

As $n - m$ incógnitas livres que tomam o valor zero se denominam variáveis não básicas. As restantes variáveis são básicas.

Exemplo 4

Achar alguma solução básica do problema de programação linear:

max. $2x_1 + x_3$

sujeito a: $\begin{cases} x_1 + x_3 = 4 \\ x_2 + 5x_3 = 5 \end{cases}$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

A matriz deste sistema, A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ tem rango 2, portanto, o número de incógnitas livres na solução é $n - m$ =1.

Para determinar uma solução básica bastará atribuir o valor zero a incógnita x_3. Obteremos:$x_1 = 4$;$x_2 = 5$. Onde a solução factível básica é:

X=$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Observe-se que no exemplo anterior, o sistema de equações dado: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

Se pode expressar na forma: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} . x_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ (1)

Em que $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ é uma submatriz da matriz A, do mesmo rango que A e não singular.

Se denotamos por B= $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$, $X_R = [x_3]$,da equação matricial (1) se obtem: $BX_B + RX_R = b$.Pelo que, para achar as variáveis básicas fazemos $X_R = 0 (x_3 = 0)$, essas variáveis básicas são a solução do sistema de equações $BX_B = b$ cuja matriz é não singular e portanto: $X_B = B^{-1}b$.

Uma solução básica do sistema está formada pelas variáveis básicas X_B e as variáveis não básicas denotadas por X_R.

Logo $X = (X_B, X_R)$ é uma solução básica do problema dado, se existe uma matriz B, tal que $X_B = B^{-1}b$ e X_R=0; $X \geq 0$.

No teorema a seguir, se estabelece uma relação entre as soluções factíveis básicas e,os pontos extremos do conjunto de soluções factíveis.

Teorema 2.2: Em um problema de programação linear, as soluções básicas são pontos extremos do conjunto de soluções factíveis. No exemplo desta secção, as soluções básicas são pontos 0,A,B e C do gráfico das soluções. (ver figura 3).

Demonstração ($\Longrightarrow$): Suponhamos que X é uma solução básica factível, então teremos $X^T = \{X^T{}_B X^T{}_N\} = \{X^T{}_B 0^T{}_N\}$, AX = b $\Longrightarrow$ BX = b. Suponhamos agora pelo contrário que X não é um ponto extremo, haverá dois pontos factíveis Y e Z diferentes de X, tais que: X=$\alpha Y + (1-\alpha)$Z, $0 < \alpha < 1$; Y_N,$Z_N \geq 0$, $0 = X_N = Y_N = Z_N$, Por outro lado, para as variáveis básicas: $BX_B = BY_B = BZ_B = b \Longrightarrow Y_B = Z_B = X_B$, o que é uma contradição, quer dizer que X é um ponto extremo.

($\Longleftarrow$) Suponhamos agora que X é um ponto extremo, então X é factível, logo AX = b (X $\geq$ 0).Separando as t componentes nulas: $X^T = \{X^T{}_b X^T{}_t\} = \{X^T{}_b 0^T{}_t\} (b + t = n)$, admite-se que o número de elementos de X_b é diferente de m. Se obterá: AX = b $\Longrightarrow$ $A_b X_b = b$($A_b$poderá não ser quadrada).

Se as colunas de A_b são independentes, X é uma solução básica admissível, o que queríamos demonstrar. Suponhamos agora pelo contrário que as b colunas de $A_b$são linearmente dependentes. Se poderá encontrar um vector não nulo p tal que $A_b p = 0$.Os pontos $(X_B + \alpha p)$ e $(X_B - \alpha p)$ serão admissíveis $\forall \alpha$: $A_b(X_b \pm \alpha p) = A_b X_b \pm \alpha A_b p = b, \forall \alpha$. Por hipóteses $X_b > 0$.Para pequenos valores de ε se obterá que:$X_b + \varepsilon p > 0$, $X_b - \varepsilon p > 0$, agora pode se observar que X se pode expressar como combinação linear de pontos admissíveis, o que é uma contradição porque X é um ponto extremo.Com efeito, se pode escrever :$\begin{Bmatrix} X_b \\ 0_t \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} X_b + \varepsilon p \\ 0_t \end{Bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{Bmatrix} X_b - \varepsilon p \\ 0_t \end{Bmatrix}$, daqui, se conclui que se X é um ponto extremo, é também uma solução básica factível.

Teorema 2.3: Dado um problema de programação linear em forma standard:

(1) Se existe uma solução factível, então existe uma solução factível básica.

(2) Se existe uma solução óptima, então existe uma solução óptima básica.

Este teorema, que se conhece como o teorema fundamental de programação linear, permite restringir o campo das soluções no qual devemos trabalhar, que são as soluções básicas.

Demonstração:

(1) Sejam A_1, A_2,..., A_n os vectores coluna da matriz A. Suponha que X = (x_1,x_2 , ..., x_n) seja uma solução factível. Então, em termos das colunas de A, esta solução satisfaz:
$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n = b$(1)
Suponha que exactamente p das variáveis x_i são maior do que zero e, por conveniência, que estas são as p primeiras variáveis. Então podemos reescrever (1) como
$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n = b$ (2)
Temos então que considerar dois casos, dependendo se os vectores A_1, A_2, ... , $A_p$são linearmente independentes (LI) ou não (LD).
Caso 1: Suponha que A_1, A_2, ... , A_p são LI. Então p ≤ m. Se p = m, a solução é uma solução básica . Se p $<$ m, então podemos seleccionar m – p vectores entre os n – p restantes tal que o conjunto dos m vectores formado por A_1, A_2, ..., A_p e os m – p escolhidos são LI, pois o posto de A é m. Atribuindo o valor zero as m – p variáveis correspondentes, obtemos uma solução básica factível (degenerada neste caso).
Caso 2: Suponha que A_1, A_2, ..., $A_p$são LD. Então, por definição de LD, existe uma

combinação não trivial destes vectores que é nula. Isto é, existem constantes y_1, y_2,..., y_p.com pelo menos uma delas positiva, tal que $y_1A_1 + y_2A_2 +\ldots+ y_pA_P= 0$ (3)

Multiplicando (3) por um escalar ε, e subtraindo de (2) obtemos

$(x_1 - \varepsilon y_1)A_1 + (x_2- \varepsilon y_2)A_2 +\ldots+ (x_p- \varepsilon y_p)A_P= b$ (4)

A expressão (4) é válida para qualquer ε e, para cada ε, as componentes $x_i- \varepsilon y_i$ correspondem a uma solução de (4) , embora a restrição $x_i- \varepsilon y_i \geq 0$ possa ser violada.

Fazendo Y = $(y_1,y_2 , ...,y_p , 0, 0, ...,0)$ vemos que, para qualquer ε , uma solução de (4) é: $X- \varepsilon Y$ (5)

Para $\varepsilon = 0$, X é a solução básica factível original. Quando εcresce a partir de zero, as componentes de X podem aumentar, diminuir, ou permanecerem as mesmas, dependendo se os valores correspondentes de y_i são negativos, positivos ou nulos. Como estamos supondo que pelo menos um dos valores de y_i é positivo, pelo menos uma das componentes diminui quando ε aumenta. Vamos aumentar ε até que uma ou mais das componentes tornam-se nulas, isto é, vamos considerar o seguinte valor de ε :

$\varepsilon = \min\{\frac{x_i}{y_i}:y_i> 0\}$ (6)

Para este valor de ε, a solução dada por (5) é factível e possui no máximo p – 1 variáveis positivas. Repetindo este processo, se necessário, podemos eliminar as variáveis positivas até que se tenha uma solução factível com as colunas correspondentes LI, situação onde o caso 1 se aplica.

(2) Agora suponhamos que X é uma solução óptima. Usa-se o procedimento análogo ao anterior isto é: Suponhamos que X = $(x_1,x_2 , ..., x_n)$ seja uma solução óptima. Então, em termos das colunas de A, esta solução satisfaz:

$x_1A_1 + x_2A_2 +\ldots+ x_nA_n= b$(1)

Suponhamos que exactamente p das variáveis $x_i$são maior do que zero e, por conveniência, que estas são as p primeiras variáveis. Então podemos reescrever (1) como

$x_1A_1 + x_2A_2 +\ldots+ x_nA_n= b$ (2)

Temos então que considerar dois casos, dependendo se os vectores A_1, A_2, ... , $A_p$são linearmente independentes (LI) ou não (LD).

Caso 1: corresponde ao caso LI e é tratado exactamente da mesma forma como acima.

Caso 2: corresponde ao caso LD e também é tratado da mesma forma como no caso correspondente a primeira parte da demonstração, mas neste caso temos que garantir que X – εY é óptima.Para isso é necessário mostrar que CY=0.Então nós temos C(X – εY)=CX, e a optimalidade de X – εY depende da optimalidade de X.

Suponhamos pelo contrário que CY$\neq$ 0.Agora escolhendo um número real r com o mesmo sinal de CY e : |r| = min{$\frac{x_i}{y_i}$:$y_i \neq 0$}> 0.

Então X – rYé solução factível. De facto

(1) Se y_i= 0, então x_i– ry_i= x_i– $r0$ = x_i≥0;

(2) Se y_i >0, então $x_i – ry_i \geq x_i – \left|\frac{x_i}{y_i}\right| y_i = x_i – \frac{x_i}{y_i} y_i = 0$.

(3) Se y_i <0, então $x_i – ry_i = x_i + \left|\frac{x_i}{y_i}\right| y_i = x_i + \frac{|x_i|}{|y_i|} y_i = x_i + \frac{x_i}{-y_i} y_i = 0$.

Então nós obtemos CX > CX − rCY = C(X − rY). Mas isso contradiz a optimalidade de X. Logo,CY=0 .Então conclui-se que X – εYé uma soluçao óptima.

2.4.5-ESBOÇO DO MÉTODO SIMPLEX

O método simplex, devido a George B.Dantzig, é um procedimento iterativo que permite realizar uma exploração dirigida do conjunto convexo de soluções básicas, quer dizer, do conjunto dos pontos extremos da região das soluções factíveis.

Para aplicar este método, necessitamos conhecer uma solução básica desde o princípio. O método consiste em calcular em cada iteração uma solução que melhore cada vez mais o valor da função objectivo. Este método garantirá que a mesma base não pode aparecer nunca em duas iterações distintas, o que basta para assegurar a convergência do processo, é dizer que, termina em um número finito de passos. A aplicação deste método determina que ocorra uma das seguintes possibilidades:

1.Não existe solução óptima finita.

2.Pode existir uma ou mais soluções óptimas.

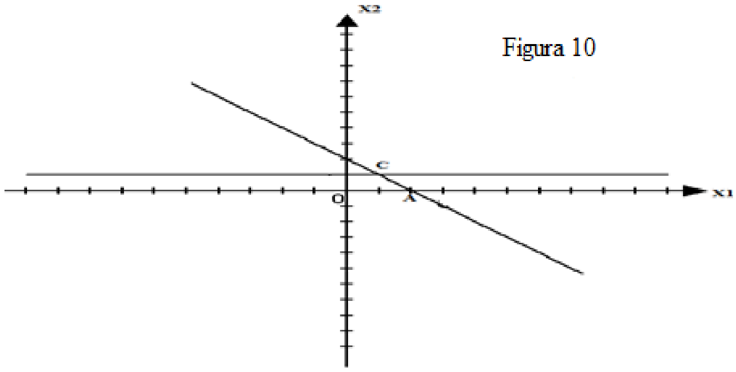
Em qualquer dos casos, pelo teorema 2, existe uma solução factível básica óptima que, pelo teorema 1,corresponde com um ponto extremo do conjunto convexo de soluções factíveis. No exemplo a seguir, veremos como dada uma solução factível básica, é possível obter outra que melhore o valor da função objectivo. No gráfico da figura 11, observaremos como são uma e outra, dos pontos extremos adjacentes do conjunto convexo de soluções factíveis.

Exemplo 5:max. $x_1 + 2x_2$

Sujeito as restrições: $\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 2 \\ x_2 \leq 1 \end{cases}$

$x_1, x_2 \geq 0$

Gráficamente é fácil resolver este problema (ver figura 10)



Para expressar este problema em forma standard, agregaremos as variáveis de folga x_3 e x_4, obtendo-se assim:

Max. $x_1 + 2x_2$

Sujeito a

$\begin{cases} x_1 + \quad x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + x_4 = 1 \end{cases}$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

A matriz deste sistema de equações lineares é:A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e b=$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ uma base a constituir a submatriz formada pelas colunas 1 e 4.

Seja esta base B=$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, Então:

X_B=$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$; logo, uma solução factível básica é $x_1 = 2,\ x_4 = 1$, $x_2 = x_3 = 0$, que no gráfico é o ponto A (ver figura 11)

Para esta solução o valor da função objectivo é: 2+2×0 = 2

Se escolhermos agora como base a submatriz formada pelas colunas 1 e 2 da matriz A, então B=$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (Note-se que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ =1$\neq$ 0; B é não singular), onde:

X_B=$B^{-1}b = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Logo, outra solução factível básica é:$x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$, que no gráfico é o ponto C que é a solução óptima. Esta última solução melhora o valor obtido na outra solução, já que o valor da função objectivo é:$1 + 2\,.1\ = 3 > 2$.

O algoritmo de simplex dá um critério sobre que vector na base se substituirá e por qual será substituído. Contudo, não abordaremos sobre este critério no presente trabalho.

É necessário salientar, que a aplicação do algoritmo de simplex se realiza em forma muito mais ágil, com a construção e uso de uma tabela denominada tabela de simplex em que aparece directamente, em cada iteração e com uma série de cálculos que se realizam sobre a mesma, a inversa da base com a qual se havia trabalhado.

2.5-PROBLEMA DE TRANSPORTE

O Problema de Transporte é talvez o mais representativo dos problemas de Programação linear. É um problema de grande aplicação prática, tendo sido estudado por vários investigadores, embora tenha sido George B.Dantzing o primeiro a estabelecer a sua formulação em programação linear e a propor um método sistemático de resolução. Como quaisquer problemas de programação linear, também este pode ser resolvido pelo método Simplex. Porém, a sua estrutura própria permitiu a utilização de métodos que, embora derivados do Simplex, são mais eficientes. Existem muitos problemas de programação linear, que podem ser formulados como de transporte, apesar de, aparentemente, não existir qualquer relação com este tipo de problemas.

Definição 2.6: Este problema, é um dos particulares de programação linear, que consiste em determinar a forma mais económica de enviar um *bem* disponível, em quantidades limitadas, em determinados locais para outros locais onde é necessário.

O objectivo deste problema é de minimizar o custo de todo o volume de transporte, obedecendo às necessidades de recebimento do destino e capacidade de envio da origem, em que se supõe que os custos unitários de transporte de cada origem i para cada destino j, c_{ij} são proporcionais às quantidades transportadas x_{ij} .

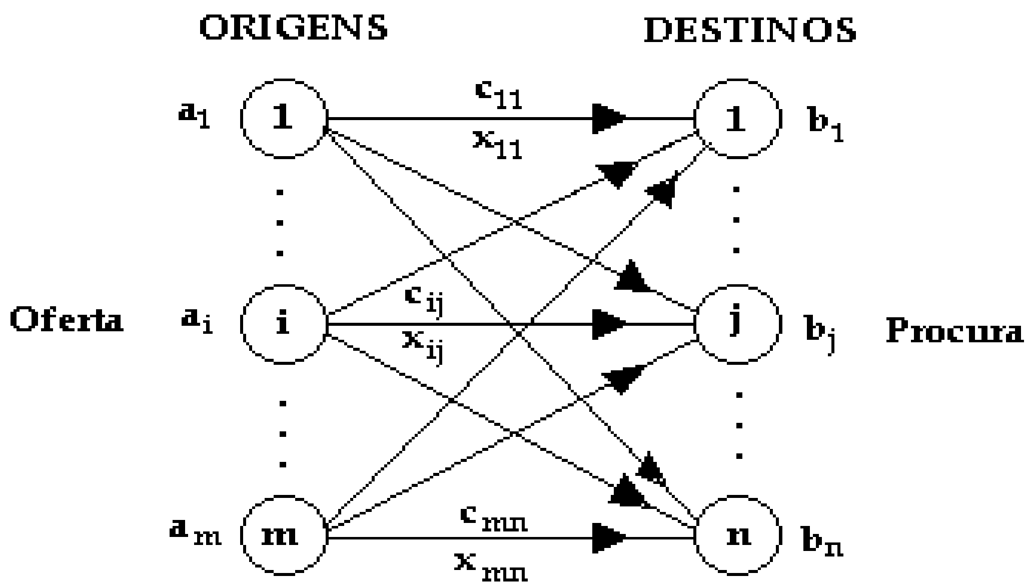
O problema clássico de transporte surge com a necessidade de programar a distribuição óptima de um produto homogéneo que:

a) Encontram-se disponíveis em m origens nas quantidades fixas a_i> 0 (oferta), com i = 1,2…, m;

b) É necessário em n destinos nas quantidades fixas b_j> 0 (procura), com j = 1, 2, …, n;

c) Deve ser enviado directamente para os destinos, esgotando as disponibilidades em cada origem e satisfazendo as necessidades em cada destino (a procura total igual a oferta total); Neste caso, o problema diz-se ser equilibrado ou balanceado.

Figura 11. Problema de Transporte em forma de Rede.



A Figura 11 ilustra o problema de transporte sob a forma de uma rede com m origens e n destinos representados por nós; os arcos que ligam as origens aos destinos representam os percursos através dos quais o produto pode ser transportado.

Uma outra forma de representar este problema, consiste na utilização de um quadro em que,

• Cada linha corresponde a uma origem,

• Cada coluna corresponde a um destino,

• A última coluna contém a informação relativa às quantidades disponíveis nas origens,

• A última linha contém a informação respeitante a quantidades necessárias nos destinos,

• Em cada quadrícula (i, j) encontra-se a quantidade a transportar da origem **i** para destino j, x_{ij} , e o correspondente custo unitário de transporte c_{ij} .

•A soma em linha dos x_{ij} é igual a quantidade de a_i

• A soma em coluna dos x_{ij} é igual a quantidade de b_j**.**

Quadro do Problema de Transporte.

Destinos / **Origens**	**1**		**2**		**...**	n		**Oferta**
1	x_{11}	c_{11}	x_{12}	c_{12}	...	x_{1n}	c_{1n}	a_1
2	x_{21}	c_{21}	x_{22}	c_{22}	...	x_{2n}	c_{2n}	a_2
...	.. .		...		...			**...**
$\boldsymbol{m}$	x_{m1}	c_{m1}	x_{m2}	c_{m2}	...	x_{mn}	c_{mn}	a_m
Procura	b_1		b_2		...	b_n		$\sum a_i = \sum b_j$

2.5.1-FORMULAÇÃO DE UM PROBLEMA DE TRANSPORTES

Seja: c_{ij}→ o custo de transporte de uma unidade de produto da origem i até ao destino j.

a_i→ A quantidade de produto disponível para ser transportada de cada centro de oferta i.

b_j → A quantidade de produto procurada em cada centro de procura j.

x_{ij} →A quantidade de produto a transportar de cada centro de oferta i para cada outro centro de procura j ao custo unitário de c_{ij}.

Com estas definições, a seguir, apresentamos o modelo matemático do problema de transporte sob a forma simbólica e a forma genérica respectivamente:

$$Minimizar\ Z = \sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

sujeito a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i (i = 1,2,\dots m) \quad Restrições\ de\ oferta$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j\ (j = 1,2,\dots n)\ Restrições\ de\ procura$$

$x_{ij} \geq 0$ $(i = 1,2,\dots m\ ;\ j = 1,2,\dots n)$ Restrição de não negatividade

O problema clássico apresenta uma estrutura especial, segundo a disposição das restrições, ou seja:

$$minimizar\ Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + \cdots + c_{mn}x_{mn}$$

Sujeito a

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + \cdots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + \cdots + x_{2n} = a_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + \cdots + x_{3n} = a_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{m1} + x_{m2} + x_{m3} + \cdots + x_{mn} = a_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + \cdots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + \cdots + x_{m2} = b_2 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + \cdots + x_{m3} = b_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{1n} + x_{2n} + x_{3n} + \cdots + x_{mn} = b_n \end{cases}$$

Com $x_{ij} \geq 0$ Restrição de não negatividade

2.5.2-ARRANJOS NA FORMA GENÉRICA

Nota: Apresentamos a relação do modelo Matemático de programação linear Simplex Versus problema de transporte.

$$Minimizar\ Z = \sum_{i}^{m}\sum_{j}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

Sujeito a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i; \qquad i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq b_j; \qquad j = 1, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n$$

Por norma o problema só terá solução se a quantidade total de procura for igual a quantidade total de oferta, ou seja se $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Na maioria dos problemas reais a soma das disponibilidades é diferente da soma dos requerimentos: oferta diferente da procura.

A resolução destes casos consiste em transformá-los na forma equilibrada (oferta igual à procura) para depois se aplicarem os métodos descritos. Duas situações podem acontecer:

a) A oferta é superior à procura ($\Sigma\ a_i > \Sigma\ b_j$): criar um destino fictício cujo requerimento é igual à diferença entre a oferta e procura ($\Sigma\ a_i - \Sigma\ b_j$) e com custos de transporte nulos.

b) A procura é superior à oferta ($\Sigma a_i < \Sigma\ b_j$): Criar uma origem fictícia com disponibilidade igual ao excesso da procura em relação à oferta ($\Sigma\ b_j - \Sigma\ a_i$) e com custos de transporte nulos.

O resto do processo de resolução é o mesmo que para os casos equilibrados (procura total igual a oferta total), a única atenção a ter é em relação à interpretação da solução óptima. Se por exemplo tivermos um destino fictício, e existir transporte de uma origem para esse destino, isso não significa que esse transporte se faz efectivamente, mas sim que na origem ficam em armazém as quantidades que lhe estão afectas na solução.

Se o total do produto a oferecer for superior ao total do produto procurado, então a quantidade total a transportar será apenas o limite dos produtos procurados ficando alguns produtos em stock, na origem.

Se o total de produtos a oferecer for inferior ao total de produtos procurados, então a quantidade total a transportar será apenas o limite do produto oferecido, ficando alguma procura por satisfazer.

A partir do momento em que fica garantido que $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, Pode-se formular o problema de transporte com todas as restrições sob forma de igualdade, pois se assegura que toda quantidade oferecida terá destino e que toda quantidade procurada será satisfeita. Diz-se então que o problema está equilibrado, Simbolicamente tem-se:

$Minimizar\ Z = \sum_{\mathrm{i}}^{\mathrm{m}} \sum_{\mathrm{j}}^{\mathrm{n}} \mathrm{c_{ij}}\, x_{ij}$ (1)

Sujeito a

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i; \quad i = 1, \dots, m$ (2)

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j; \quad j = 1, \dots, n$ (3)

$x_{ij} \geq 0, i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n$

Portanto, embora a forma matricial é a forma mais útil de representação do problema de transporte, suas equações matriciais são também úteis para trazer algumas de suas características importantes. Para colocá-lo em sua forma de matriz é conveniente multiplicar um conjunto de equações das restrições por (-1), quer dizer, a equação (3), resultando em,

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad ; \quad i = 1, \dots, m \\ -\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = -b_j\ ; \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \qquad (4)$$

As equações acima em forma de matriz serão: $TX = B$(5)

Onde X é o vector coluna de elementos x_{ij} que são em número $m \times n$. O vector coluna B tem $m+n$ elementos, m do tipo a_i e n do tipo $-b_j$. A matriz T é de ordem $(m+n) \times (m.n)$

2.5.3-DEFINIÇÕES E ALGUNS TEOREMAS FUNDAMENTAIS DO PROBLEMA DE TRANSPORTE.

Definição 2.7: Uma solução factível(admissível) no problema de transporte é um conjunto de variáveis ($x_{ij} \geq 0$) se esta satisfazer as restrições de oferta e procura.

Definição 2.8: Uma solução factível do problema de transporte diz-se solução básica factível (SBF), se o número total de variáveis positivas x_{ij} é exactamente igual a $m+n-1$.

Definição 2.9: Uma solução factível do problema de transporte diz-se solução básica factível degenerada, se o número total de variáveis positivas x_{ij} é menor que $m+n-1$.

Definição 2.10: Uma solução básica factível diz-se óptima se as variáveis duais associadas u_i ,v_j Satisfazerem a desigualdade: $u_i + v_j \leq c_{ij}$ Para todas as células não preenchidas.

Teorema 2.4:A condição necessária e suficiente para que o problema de transporte tenha solução viável (admissível) é: $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

Demonstração (⇒)

Suponhamos que existe solução factível, isto é:$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$ **(1)** e $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j$ **(2)**

Somando as expressões **(1)** e **(2)** m origens e n destinos respectivamente vem:

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i$; $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$.

(⇐) Suponhamos agora que $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ = k> 0 e $x_{ij} = \beta_i b_j$(i =1, …, m) com $\beta_i \neq 0$ e $\beta_i \in R$, $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \beta_i b_j = \beta_i \sum_{j=1}^{n} b_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \beta_i k \Rightarrow \beta_i = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \frac{1}{k} a_i$, daqui, $\beta_i = \frac{a_i}{k} \Rightarrow x_{ij} = \frac{a_i b_j}{k}$ (i =1, …, m e j =1, …, n) e como $a_i \geq 0$ e $b_j \geq 0$ Então $x_{ij} \geq 0$, ou seja, existe solução factível.

Teorema 2.5: O problema de transporte equilibrado ou balanceado tem sempre solução óptima (finita).

Demonstração: Seja $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$,Neste caso, existe solução factível, ou,

$x_{ij} \geq 0$ (**1).** Por outro lado, pela hipótese do problema de transporte, tem-se, $x_{ij} \leq min\{a_i; b_j\}$ **(2).** Combinando as expressões **(1)** e **(2)** tem-se:0≤ $x_{ij} \leq min\{a_i; b_j\}$, como a região factível é não vazia, limitada e fechada, então existe solução óptima finita.

Teorema 2.6: Se a_i, e b_j Com i = 1, 2, …, m e j = 1, 2, …, n, são inteiros, então qualquer SBF tem apenas valores inteiros.

Demonstração: Por **2.6.1** toda variável básica pode ser escrita sob a forma x_{pq} =

min { a_p, b_q}, com p =1,…, m; q = 1, …, n. Por outro lado pela hipótese todos os a_i, b_j são inteiros, por **2.6.1** novamente, atribui-se a a_i a diferença entre a_i com x_{pq} e o mesmo acontece com b_j até se suprirem todas as necessidades e esgotarem as disponibilidades, claramente que todas as variáveis básicas para qualquer base também são inteiras, pois o mínimo de inteiros é sempre inteiro e a subtracção de dois inteiros é sempre inteiro.

Teorema 2.7: No modelo de transporte, qualquer uma das equações do sistema de restrições pode ser expressa como combinação linear das restantes.

Demonstração:

Sabemos que o sistema de equações lineares do modelo de transporte é:

$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i$; i = 1,…,m

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j$; j =1,…,n

Desta forma podemos escrever:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = a_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = a_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = b_1 \\ x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} = b_2 \\ \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{mn} = b_n \end{cases}$$

A demonstração não perde generalidade se por exemplo verificarmos que a primeira equação se pode expressar como combinação linear das restantes.

Com efeito, se somarmos as n equações do segundo tipo de restrições obteremos:

$$(x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n}) + (x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n}) + \cdots + (x_{m1} + x_{2m} \cdots + x_{mn}) = b_1 + b_2 + \cdots b_n$$

Equação A. Se somarmos as equações do primeiro tipo de restrições a partir da segunda equação obteremos uma nova equação que chamaremos de B ou seja:

$$(x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n}) + \cdots + (x_{m1} + x_{m2} \cdots + x_{mn}) = a_2 + \cdots + a_m = B$$

$$A - B = (x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n}) + (x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n}) + \cdots + (x_{m1} + x_{2m} \cdots + x_{mn}) -$$

$$(x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n}) - \cdots - (x_{m1} + x_{m2} \cdots + x_{mn}) = b_1 + \cdots + b_n - a_2 - a_3 - \cdots - a_m$$

Ou seja

$x_{11} + \cdots + x_{1n} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=2}^{m} a_i = a_1$ Obteremos a primeira equação. Como A – B

Como A é combinação linear das equações do segundo tipo e B é combinação linear de m-1 equações do primeiro tipo (não se inclui a primeira), então A – B é combinação linear das equações do sistema a partir da segunda.

Como a primeira equação é igual a A – B, então fica demonstrado que a primeira equação se pode expressar como combinação linear das restantes *m+n-1* equações do sistema. Como consequência desta demonstração, podemos afirmar que nos problemas de transporte, uma das equações do sistema é redundante e portanto se pode eliminar ficando então o modelo com nxmvariáveis e n+m-1 restrições, o que quer dizer, que existirão somente m+n-1 variáveis básicas.

Exemplo 6: Determine uma solução básica com: a_1=2, a_2=4, a_3=7, b_1=3, b_2=2, b_3=4, b_4=2, b_5=2

2	0	0	0	0	**2**
1	2	1	0	0	**4**
0	0	3	2	2	**7**
3	**2**	**4**	**2**	**2**	

Teorema2.8: Cada conjunto m+n-1 vectores LI do sistema de equações do modelo de transporte reduzido pode ser arranjado como uma matriz triangular.

Este teorema também se pode enunciar da seguinte forma: "todas as bases do problema de transportes são triangulares".

A importância deste teorema radica no facto de facilitar a resolução destes sistemas de equações por métodos como o de substituição.

Demonstração:

Considerando à matriz T referida na equação (5) em (2.5.2), que possui m + n linhas, mas é de rango m + n-1. Com a exclusão de uma linha de T ficamos com uma matriz $\bar{T}$ com m + n-1 linhas, e que deve ser possível encontrar m + n-1 coluna nesta matriz que são linearmente independentes. Seja A uma matriz de ordem (m + n-1) x (m + n-1) com colunas linearmente independentes. Cada uma destas colunas, no máximo, pode ter dois elementos diferentes de zero, um elemento 1 e outro -1, todas as colunas têm dois elementos diferentes de zero, então a soma das linhas será zero, e por isso a matriz A vai ser singular o que significaria que as suas colunas não são linearmente independentes. Isto será uma contradição. Dai não é possível todas as colunas possuírem dois elementos diferentes de zero. O número total de elementos diferentes de zero em A, por conseguinte, deve ser inferior a 2 (m + n-1).Uma vez que existem apenas m + n-1 linha em A e cada linha tem de conter pelo menos um elemento diferente de zero (do contrário, A não será singular), deve haver pelo menos uma linha com apenas um elemento diferente de zero.

Eliminando esta linha e a coluna que contém apenas um elemento diferente de zero, ficamos com uma matriz não singular de ordem m + n-2, e repetindo o argumento temos de encontrar uma equação neste sistema contendo uma única variável básica, oque prova que as variáveis básicas constituem um sistema triangular de equações.

Definição 2.11: Um sistema de equações lineares AX = b, é triangular se a matriz A se pode arranjar como uma matriz triangular.

Exemplo: o sistema de equações anterior será agora resolvido pelo método de retro substituição.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{33} \\ x_{34} \\ x_{35} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$x_{11} + x_{21} = 3$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 4$

$x_{22} = 2$

$x_{23} + x_{23} = 4$

$x_{33} + x_{34} + x_{35} = 7$

$x_{34} = 2$

$x_{35} = 2$

$x_{33} + 2 + 2 = 7 \rightarrow x_{33} = 3$

$x_{23} + 3 = 4 \rightarrow x_{23} = 1$

$x_{21} + 2 + 1 = 4 \rightarrow x_{21} = 1$

$x_{11} + 1 = 3 \rightarrow x_{11} = 2$

Obtivemos assim uma solução original. Quando o sistema de equações é triangular então pelo menos uma equação contem apenas uma variável (que pode ser isolada directamente) se substituir este valor no resto das equações do sistema obtém – se pelo menos uma equação com uma incógnita e assim sucessivamente até achar todas as variáveis e isto consiste precisamente no método de retro substituição.

Métodos para construção de uma solução básica inicial dos problemas de transporte.

O algoritmo de transporte que estudaremos é igual ao método Simplex e parte de uma solução básica possível para começar as iterações. A princípio são conhecidos três métodos para construir uma solução básica factível, estes métodos são:

1.Método da esquina noroeste ou canto noroeste
2.Método do custo mínimo
3.Método das penalidades

Na secção adiante abordaremos somente sobre o método do custo mínimo.

2.6-RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DE TRANSPORTE

A resolução de um problema de transportes envolve, tal como outros problemas de programação linear, os seguintes passos:

Passo 1. Obtenção de uma SBA inicial.

Passo 2. Teste de optimalidade: se a SBA em presença satisfaz o critério do óptimo, o processo termina; caso contrário, continuar.

Passo 3. Melhoria da solução: cálculo de nova SBA através da introdução na base de uma VNB em substituição de uma VB. Voltar ao Passo 2.

2.6.1- OBTENÇÃO DE UMA SBA INICIAL

Considere-se o problema definido através do Quadro do problema de transporte. De uma maneira geral, os métodos que se apresentam para a obtenção de uma SBA inicial, apenas difere no critério de escolha da variável a considerar como básica nos sucessivos quadros:

• Escolher a primeira variável básica, de acordo com o critério utilizado: x_{pq} ,

• Atribuir a x_{pq} o maior valor possível: x_{pq} = min { a_p, b_q }

• Subtrair a a_i e b_j o valor de x_{pq}.

Este processo repete-se até se anularem todas as disponibilidades e todos os requerimentos.

Para obtenção de uma SBA inicial apresentaremos o método do custo mínimo.

• **Método do Custo Mínimo**

Este método, ao invés do anterior, tem em consideração a matriz dos custos de transporte, pelo que, em princípio, determina soluções iniciais mais próximas da solução óptima. Neste caso, a escolha da variável a tomar como básica, recai sobre aquela de menor custo em cada quadro (em caso de empate, a escolha é arbitrária).

2.6.2 OBTENÇÃO DA SOLUÇÃO ÓPTIMA DE UM PROBLEMA DE TRANSPORTE

Obtida uma SBA inicial, esta é submetida ao teste de optimalidade por um dos métodos ou critério, isto é: Stepping-Stone ou Modi, passando-se em seguida a outra solução, caso o critério respectivo não seja satisfeito; o processo repete-se até se obter a solução óptima. Neste trabalho aplicou-se o método de Modi.

• **Método de Modi:** Sejam u_i e v_j as variáveis duais associadas, respectivamente, às restrições de oferta e de procura. A cada variável básica do problema primal (célula preenchida) está associada uma restrição saturada do problema dual:x_{ij} (VB do primal) $\Leftrightarrow u_i + v_j = c_{ij}$. O algoritmo é composto pelos seguintes passos:

Passo 1. Determinar uma SBA inicial;

Passo 2. Determinar as variáveis duais, fazendo $u_1 = 0$, e calcular as restantes usando as células ocupadas;

Passo 3. Se $u_i + v_j \leq c_{ij}$ ou $0 \leq c_{ij} - u_i - v_j$ para todas as células não preenchidas então a solução é óptima; caso contrário, continuar no passo seguinte;

Passo 4. Seleccionar para a nova VB a célula para a qual se verifica $u_i + v_j > c_{ij}$ e que conduza a um maior decréscimo no custo total. Transferir para essa célula o número máximo de unidades possível.

Voltar ao Passo 2.

2.6.3-OBTENÇÃO DE UMA NOVA SBA

A partir de uma SBA pode obter uma nova solução daquele tipo, através de transferências de unidades entre células, o que constitui um ciclo. Dado que em cada quadro os requerimentos e as disponibilidades têm que ser satisfeitos, sempre que se adicionam unidades a uma célula têm que se subtrair as mesmas unidades a uma outra que esteja na mesma linha e a outra que esteja na mesma coluna. Assim, geralmente, pode-se determinar um ciclo de transferências da seguinte forma:

• Procura-se uma célula preenchida na mesma linha da célula para a qual se pretende transferir unidades,

• Na mesma coluna desta nova célula procura-se outra célula preenchida,

• Na mesma linha desta nova célula procura-se outra célula preenchida. Se esta última célula se encontrar na mesma coluna da célula para a qual se pretende transferir unidades, o ciclo fica determinado; caso contrário, continua-se a pesquisa, até se encontrar uma célula preenchida pertencente a essa coluna.

Nas células cujos valores podem sofrer diminuição, é associado um sinal (-) e nas outras um sinal (+). A sequencia de células com (+) e (-) constituem um ciclo através do qual se podem fazer transferências de unidades para a célula pretendida. O número máximo de unidades que se podem transferir para àquela célula, de modo a se obter uma SBA, através deste ciclo, é dado por: Min { x_{ij} : x_{ij} }é afectado de sinal $(-)$ no ciclo.

2.6.4-PERCURSOS IMPOSSÍVEIS

Podem ocorrer situações em que seja impossível fazer o transporte de algumas origens para alguns destinos. Nestes casos, podemos ainda aplicar as técnicas de resolução do problema de transporte, bastando só, penalizar esses percursos, com um M arbitrariamente grande, fazendo c_{ij} = M. Tal como no método das penalidades (do M grande) no método do *simplex*, também aqui a resolução manual dispensa a atribuição de valores concretos a M.

A seguir, resolveremos por completo 2 problemas relacionados com o problema de transporte.

Problema 2

Após os fogos dos últimos anos, o comando central dos bombeiros decidiu instalar um sistema de optimização de deslocação de bombeiro para frente do fogo, em função das necessidades do momento.

Num dado dia de verão muito quente nas imediações de uma grande cidade, foram dados cinco alertas de fogo, em outras tantas localizações.

A cidade em questão tem quatro quartéis de bombeiro, como respectivos homens prontos para combater os sinistros.

Devidas as boas condições de comunicações existentes com a população, foi rapidamente estimado o número de homens necessário para cada local.

A estimativa do tempo de viagem, em minuto, de cada quartel para cada fogo foi obtida a partir de um sistema de informação geográfica, previamente instalado no centro de comando.

Pretende-se saber qual o plano de transporte óptimo dos homens, que minimize o tempo de chegada dos mesmos aos locais onde lavram os fogos.

Os dados do problema estão no quadro a seguir:

	F1	**F2**	**F3**	**F4**	**F5**	
Q1	11	7	40	35	36	50
Q2	10	9	30	32	28	50
Q3	50	60	5	6	7	75
Q4	45	52	7	4	8	75
	60	40	50	55	45	

Resolução:

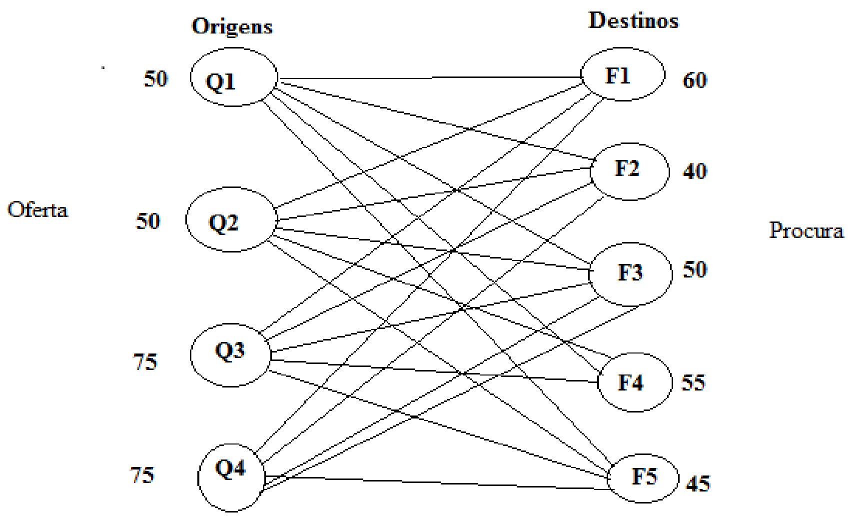
a) Representemos primeiramente o problema em forma de quadro:

	F1		F2		F3		F4		F5		Oferta
Q1	x_{11}	11	x_{12}	7	x_{13}	40	x_{14}	35	x_{15}	36	50
Q2	x_{21}	10	x_{22}	10	x_{23}	30	x_{24}	32	x_{25}	28	50
Q3	x_{31}	50	x_{32}	50	x_{33}	5	x_{34}	6	x_{35}	7	75
Q4	x_{41}	45	x_{42}	45	x_{43}	7	x_{44}	4	x_{45}	8	75
Procura	60		40		50		55		45		**250**

Onde x_{ij} (i=1,2,…,4; j=1,…,5) representam o número de homens/técnicos dos bombeiros necessário para fazer presente a cada um dos locais de incêndio F1,F2,…,F5 disponíveis nos quartéis Q1,Q2,..,Q4.

b) Representação do problema em forma de rede:

Sendo a origem m = 4 e destino n = 5temos:



Na representação do problema em forma de rede, cada uma das setas representa o percurso a efectuar de cada quartel para cada determinada frente de incêndio, no intervalo de tempo t_{ij} que cada técnico/bombeiro levará para chegar as respectivas frentes.

c) Formalização do problema no modelo matemático:

Min.Z $=11x_{11} + 7x_{12} + 40x_{13} + 35x_{14} + 36x_{15} + 10x_{21} + 9x_{22} + 30x_{23} + 32x_{24} + 28x_{25} + 50x_{31} + 60x_{32} + 5x_{33} + 6x_{34} + 7x_{35} + 45x_{41} + 52x_{42} + 7x_{43} + 4x_{44} + 8x_{45}$

Sujeito a:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 50 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 50 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 75 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} = 75 \end{array} \right.$$

Restrições de oferta

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 60 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 40 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 50 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 55 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} = 45 \end{cases}$$ Restrições de procura

$x_{ij} \geq 0$ (i=1,2,…,4; j=1,…,5) Restrições de não negatividade

d) Solução do modelo (determinação da SBA pelo método do custo mínimo)

Nota: o número de variáveis básicas no sistema de restrições é dado por:m+n-1=4+5-1=9-1=8. Neste caso, espera-se obter 8 variáveis básicas.

	F1		F2		F3		F4		F5		Oferta
Q1	x_{11}	11	x_{12}	7	x_{13}	40	x_{14}	35	x_{15}	36	50
Q2	x_{21}	10	x_{22}	10	x_{23}	30	x_{24}	32	x_{25}	28	50
Q3	x_{31}	50	x_{32}	50	x_{33}	5	x_{34}	6	x_{35}	7	75
Q4	x_{41}	45	x_{42}	45	x_{43}	7	x_{44}	4	x_{45}	8	75
Procura	60		40		50		55		45		**250**

Primeira VB: o menor dos tempos é t_{44}, pelo que x_{44} = min { 75, 55 } = 55. O destino 4 fica totalmente satisfeito.

Segunda VB: o menor dos tempos é t_{33}, Pelo que x_{33} = min { 75, 50 } = 50. O destino 3 fica totalmente satisfeito.

Terceira VB:o menor dos tempos é t_{35}, Pelo que x_{35} = min { 25, 45 } = 25. Ficando ainda por satisfazer com 20 homens o destino 5.

Quarta VB: o menor dos tempos é t_{12}, Pelo que x_{12} = min { 50, 40 } = 40. O destino 2 fica totalmente satisfeito.

Quinta VB: o menor dos tempos é t_{45}, Pelo que x_{45} = min { 20, 20 } = 20. Assim destino 5 fica totalmente satisfeito.

Sexta VB: o menor dos tempos é t_{21}, Pelo que x_{21} = min { 50, 60 } = 50.Ficando ainda por satisfazer com 10 homens o destino 1.

Sétima VB: o menor dos tempos é t_{11}, Pelo que x_{11} = min { 10, 10 } = 10.Assim destino 1 fica totalmente satisfeito.

Nota: Visto que todos os destinos foram totalmente satisfeitos, restando ainda uma variável a considerar como básica, estamos numa situação de degenerescência, em que o número de V.B é menor quen+n-1, neste caso tomemos como V.B uma outra com valor nulo, no caso, $x_{41} = 0$.

Assim, completou o número de V.B da SBA, logo, a solução básica admissível é:X=(10,40,0,0,0,50,0,0,0,0,0,0,50,0,25,0,0,0,55,20),

Pelo que, substituindo a solução obtida na função objectivo temos:

Z=11x10+7x40+10x50+5x50+7x25+7x0+4x55+8x20 = 1695.

e) Teste de optimalidade:

Agora temos de testar se a solução obtida já é óptima, ou seja, se Z é óptimo.

Consideremos o quadro abaixo com a SBA encontrada

10	40			
50				20
				25
		50		
			55	

Extraindo as equações duais para as variáveis básicas temos:

x_{44} $\quad t_{44} - u_4 - v_4 = 0 \Rightarrow 4 - u_4 - v_4 = 0$

x_{33} $\quad t_{33} - u_3 - v_3 = 0 \Rightarrow 5 - u_3 - v_3 = 0$

x_{35} $\quad t_{35} - u_3 - v_5 = 0 \Rightarrow 7 - u_3 - v_5 = 0$

x_{12} $\quad t_{12} - u_1 - v_2 = 0 \Rightarrow 7 - u_1 - v_2 = 0$

x_{45} $\quad t_{45} - u_4 - v_5 = 0 \Longrightarrow 8 - u_4 - v_5 = 0$

x_{21} $\quad t_{21} - u_2 - v_1 = 0 \Longrightarrow 10 - u_2 - v_1 = 0$

x_{11} $\quad t_{11} - u_1 - v_1 = 0 \Longrightarrow 11 - u_1 - v_1 = 0$

x_{41} $\quad t_{41} - u_4 - v_1 = 0 \Longrightarrow 45 - u_4 - v_1 = 0$

Fazendo u_1 = 0 obtemos $u_2 = -1$;$u_3 = 33$; $u_4 = 34$; $v_1 = 11$;$v_2 = 7$;$v_3 = -28$;$v_4 = -30$;$v_5 = -26$.

Para testarmos se a solução é óptima, a que se cumprir: $u_i + v_j \leq t_{ij}$(i = 1,2, … ,4; j = 1, … ,5) (para todas as variáveis não básicas) assim temos:

x_{13} $\quad t_{13} - u_1 - v_3 = 40 - 0 - (-28) = 68$

x_{14} $\quad t_{14} - u_1 - v_4 = 35 - 0 - (-30) = 65$

x_{15} $\quad t_{15} - u_1 - v_5 = 36 - 0 - (-26) = 62$

x_{22} $\quad t_{22} - u_2 - v_2 = 9 - (-1) - 7 = 3$

x_{23} $\quad t_{23} - u_2 - v_3 = 30 - (-1) - (-28) = 59$

x_{24} $\quad t_{24} - u_2 - v_4 = 32 - (-1) - (-30) = 63$

x_{25} $\quad t_{25} - u_2 - v_5 = 28 - (-1) - (-26) = 55$

x_{31} $\quad t_{31} - u_3 - v_1 = 50 - 33 - 11 = 6$

x_{32} $\quad t_{32} - u_3 - v_2 = 60 - 33 - 7 = 20$

x_{34} $\quad t_{34} - u_3 - v_4 = 6 - 33 - (-30) = 3$

x_{42} $\quad t_{42} - u_4 - v_2 = 52 - 34 - 7 = 11$

x_{43} $\quad t_{43} - u_4 - v_3 = 7 - 34 - (-28) = 1$

Como para todas as variáveis não básicas nas células não preenchidas verificam a desigualdade: $u_i + v_j \leq t_{ij}$, estamos diante da solução óptima do problema. Portanto, a solução óptima e o respectivo valor da função objectivo é:

X=(10,40,0,0,0,50,0,0,0,0,0,0,50,0,25,0,0,0,55,20), Z min = 1695.

Interpretação da solução óptima obtida:

Neste caso, em função do número de homens/técnicos bombeiros encontrados para os locais de incêndio, o valor Z=1695 representa o tempo mínimo que os técnicos levariam para se fazer presente as respectivas frente, e que neste caso, é o tempo em minutos o que equivale em horas a 28horas e 25minutos.

Problema 3

Uma empresa industrial tem três fábricas a produzir um produto que deverá ser enviado para quatro armazens. As fábricas 1,2 e 3 produzem 12,17 e 21 carregamentos por mês,respectivamente. Cada armazem necessita de receber 10 carregamentos mensais. A distancia de cada fábrica a cada armazém é dada em Km pela tabela abaixo.

	Armazém 1	Armazém 2	Armazém3	Armazém 4
Fábrica 1	800	1500	400	700
Fábrica 2	1100	600	600	1000
Fábrica 3	600	1200	800	800

O custo de cada carregamento é de 100,00 USD acrescido de 0,5 cêntimos por km.

a) Formule o problema como um problema de transporte.
b) Determine a solução admissível para o problema.
c) Investigue se a solução da alínea anteriopr é óptima.Caso não seja,melhore a solução.

Resolução:

Primeiramente determinemos os custos de cada fábrica a cada armazém.

Como o custo de cada carregamento é de 100 USD, acrescido de 0,5 cêntimos por Km, então teremos:

c_{ij} = 1000 USD +0,5× d_{ij},Onde d_{ij}- é a distancia da fábrica i ao armazém j com $i = 1, \ldots 3.$ $j = 1,2 \ldots ,4$

$$c_{11} = 100 + 0,5 \times 800 = 500$$

$$c_{12} = 100 + 0,5 \times 1500 = 850$$

$$c_{13} = 100 + 0{,}5 \times 400 = 300$$

$$c_{14} = 100 + 0{,}5 \times 700 = 450$$

$$c_{21} = 100 + 0{,}5 \times 1100 = 650$$

$$c_{22} = 100 + 0{,}5 \times 600 = 400$$

$$c_{23} = 100 + 0{,}5 \times 600 = 400$$

$$c_{24} = 100 + 0{,}5 \times 1000 = 600$$

$$c_{31} = 100 + 0{,}5 \times 600 = 400$$

$$c_{32} = 100 + 0{,}5 \times 1200 = 700$$

$$c_{33} = 100 + 0{,}5 \times 800 = 500$$

$$c_{34} = 100 + 0{,}5 \times 800 = 500$$

Assim temos os custos de cada carregamento.

a) Formulação como um problema de transporte.

Obs.: Nota-se que o problema em causa não é balanceado, ou seja, a procura total não é igual a oferta total. Uma vez que a soma das ofertas é 50 quando da procura é 40, logo, temos de introduzir um destino fictício para equilibrar (Por 2.5.3 alínea a).

Como introduzimos um destino fictício pelo facto do problema não ser balanceado, então os custos c_{15},c_{25} e c_{35} são nulos (Por 2.5.3 alínea a).

Agora passamos a ter 3 origens (m=3) e 5 destinos (n=5).

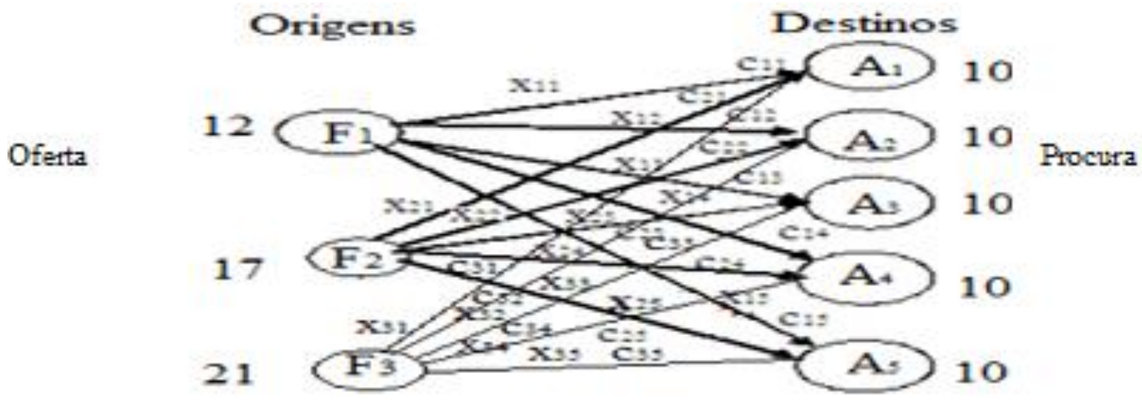
Vamos representar o problema em forma de rede, para tal consideremos:

A_1- Armazém 1,A_2- Armazém 2, A_3-Armazém 3, A_4-Armazém 4, A_5-Armazém 5

F_1-Fábrica 1, F_2-Fábrica 2, F_3-Fábrica 3, x_{ij} – A quantidade de carregamento necessário da fábrica i para armazém j; i=1,…,3; j=1,2,…,5.

c_{ij} – O custo de carregamento da fábrica i para armazém j.

Assim temos:



Representemos agora o problema em forma de quadro:

	A_1		A_2		A_3		A_4		A_5		Oferta
F_1	x_{11}	500	x_{12}	850	x_{13}	300	x_{14}	450	x_{15}	0	12
F_2	x_{21}	650	x_{22}	400	x_{23}	400	x_{24}	600	x_{25}	0	17
F_3	x_{31}	400	x_{32}	700	x_{33}	500	x_{34}	500	x_{35}	0	21
Procura	10		10		10		10		10		**50**

Assim, a formulação do modelo matemático do problema em forma de transporte é :

Min.Z= $500x_{11} + 850x_{12} + 300x_{13} + 450x_{14} + 650x_{21} + 400x_{22} + 400x_{23} + 600x_{24} + 400x_{31} + 700x_{32} + 500x_{33} + 500x_{34}$

Sujeito a:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 12 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 17 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 2 \end{cases}$$

Restrições de oferta

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 10 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 10 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 10 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} = 10 \end{cases}$$ Restrições de procura

$x_{ij} \geq 0$ (i=1,…3; j=1,…,5) Restrições de não negatividade

b) Determinação da solução básica admissível (SBA)

Determinemos a SBA do problema pelo método do custo mínimo, para tal, o número de variáveis básicas esperadas é dado por: m+n-1= 3+5-1=8-1=7. Neste caso serão 7 V.B.

Consideremos o quadro:

	A_1		A_2		A_3		A_4		A_5		Oferta
F_1	x_{11}	500	x_{12}	850	x_{13}	300	x_{14}	450	x_{15}	0	12
F_2	x_{21}	650	x_{22}	400	x_{23}	400	x_{24}	600	x_{25}	0	17
F_3	x_{31}	400	x_{32}	700	x_{33}	500	x_{34}	500	x_{35}	0	21
Procura	10		10		10		10		10		50

Conforme o quadro acima vem:

Primeira VB: o menor dos custos é c_{13}, pelo que x_{13} = min{ 12, 10 } = 10. O destino 3 fica totalmente satisfeito.

Segunda VB: o menor dos custos é c_{22}, pelo que x_{22} = min{ 17, 10 } = 10. O destino 2 fica totalmente satisfeito.

Terceira VB: o menor dos custos é c_{14}, Pelo que x_{14} = min{2, 10} = 2. Ficando ainda por satisfazer com 8 carregamento o destino 4.

Quarta VB: o menor dos custos é c_{34}, Pelo que x_{34} = min{21,8} = 8. O destino 4 fica totalmente satisfeito.

Quinta VB: o menor dos custos é c_{31}, Pelo que x_{31} = min{13, 10} = 10. Assim o destino 1 fica totalmente satisfeito.

Sexta VB: o menor dos custos é c_{25}, pelo que x_{25} = min{7,10} = 7.Ficando ainda por satisfazer com 3 carregamentos o destino 5.

Sétima VB: o menor dos custos é c_{35}, Pelo que x_{35} = min{3, 3} = 3.Assim o destino5 fica totalmente satisfeito.

Daqui, a SBA encontrada para o problema é:X= (0;0;10;2;0;0;10;0;0;7;10;0;0;8;3).

Pelo que, substituindo a solução obtida na função objectivo temos:

Z = 300 ×10 + 450 × 2 + 400×10+400× 10+500×8 = 15900.

d) Investigar se a solução obtida é óptima.

Consideremos o quadro abaixo com a SBA encontrada

		10	2	
	10			7
10			8	3

Extraindo as equações duais para as variáveis básicas temos:

$$x_{13} \qquad c_{13} - u_1 - v_3 = 0 \Longrightarrow 300 - u_1 - v_3 = 0$$

$$x_{22} \qquad c_{22} - u_2 - v_2 = 0 \Longrightarrow 400 - u_2 - v_2 = 0$$

$$x_{14} \qquad c_{14} - u_1 - v_4 = 0 \Longrightarrow 450 - u_1 - v_4 = 0$$

$$x_{31} \qquad c_{31} - u_3 - v_1 = 0 \Longrightarrow 400 - u_3 - v_1 = 0$$

$$x_{25} \qquad c_{25} - u_2 - v_5 = 0 \Longrightarrow 0 - u_2 - v_5 = 0$$

$$x_{35} \qquad c_{35} - u_3 - v_5 = 0 \Longrightarrow 0 - u_3 - v_5 = 0$$

$$x_{34} \qquad c_{34} - u_3 - v_4 = 0 \Longrightarrow 500 - u_3 - v_4 = 0$$

Fazendo $u_1 = 0$ obtemos $u_2 = 50$;$u_3 = 50$; $v_1 = 350$;$v_2 = 400$;$v_3 = 300$;$v_4 = 450$;$v_5 = -50$.

Para testarmos se a solução é óptima, tem de se cumprir: $u_i + v_j \leq c_{ij}$ ou $0 \leq c_{ij} - u_i - v_j$ (i = 1,2,3; j = 1, ... ,5) (para todas as variáveis não básicas) assim temos:

$$x_{12} \qquad c_{12} - u_1 - v_2 = 850 - 0 - 400 = 450$$

$$x_{21} \qquad c_{21} - u_2 - v_1 = 650 - 50 - 350) = 250$$

$$x_{23} \qquad c_{23} - u_2 - v_3 = 400 - 50 - 50 = 300$$

$$x_{24} \qquad c_{24} - u_2 - v_4 = 600 - 50 - 450 = 100$$

$$x_{32} \qquad c_{32} - u_3 - v_2 = 700 - 50 - 400 = 250$$

$$x_{11} \qquad c_{11} - u_1 - v_1 = 500 - 0 - 350 = 150$$

$$x_{15} \qquad c_{15} - u_1 - v_5 = 0 - 0 - (-50) = 50$$

$$x_{33} \qquad c_{33} - u_3 - v_3 = 500 - 50 - 300 = 150$$

Como para todas as variáveis não básicas nas células não preenchidas verificam a desigualdade: $u_i + v_j \leq c_{ij}$, estamos diante da solução óptima do problema. Portanto, asolução óptima e o respectivo valor da função objectivo é: X= (0;0;10;2;0;0;10;0;0;7;10;0;0;8;3), Z = 15900.

Interpretação da solução óptima:

Em função da solução obtida, a empresa industrial, deve fazer o envio dos carregamentos da seguinte forma:

- A fábrica 1 deve enviar para o armazém 3, dez carregamentos mensal.
- A fábrica 1 deve enviar para o armazém 4, dois carregamentos mensal.
- A fábrica 2 deve enviar para o armazém 2, dez carregamentos mensal.
- A fábrica 2 deve enviar para o armazém 5, sete carregamentos mensal.
- A fábrica 3 deve enviar para o armazém 1, dez carregamentos mensal.
- A fábrica 3 deve enviar para o armazém 4, oito carregamentos mensal.
- A fábrica 3 deve enviar para o armazém 5, três carregamentos mensal.

CAPÍTULO III-PROBLEMA DE DISTRIBUIÇÃO DE COMBUSTÍVEL NA REGIÃO SUL (CASO DE ESTUDO)

O Problema

A rede de distribuição de combustível na região sul de Angola, compreende as províncias do Huambo, Bié, Kuando Kubango, abastecidas pelo TOL (Terminal Oceânico do Lobito), bem como as províncias da Huila e Cunene abastecidas pelo TON (Terminal Oceânico do Namibe). Na figura 12,apresenta-se o diagrama que ilustra o quadro actual do plano de distribuição nesta região em que cada província necessita de $b_j m^3$ de combustível dada as disponibilidades $a_i m^3$ de combustível nos terminais.

Do estudo realizado sobre o plano de distribuição, constatou-se que na eventualidade de ocorrência de uma anomalia (estrangulamento) no roteiro, a actual forma de distribuição/transportação não garante o cumprimento da responsabilidade que a Sonangol tem, ou seja, o de fazer chegar o combustível para as referidas localidades.

Pretende-se idealizar um plano óptimo de distribuição que a Sonangol poderá eventualmente implementar, de maneira que caso ocorra um estrangulamento num dos percursos, o combustível chegue nas referidas localidades.

Os dados referentes aos custos de transportação de combustível (gasolina) dos terminais as instalações, assim como as disponibilidades e necessidades relativamente a primeira quinzena de Outubro de 2015,encontram-se no quadro a seguir:

	ICH	ICB	ICKK	ICCU	ICL	
TOL	25.388.100,36kz	12.592.878,75kz	6.683.065,376kz			7587,2175m^3
TON				4.488.711,5kz	12.489.444kz	6306 m^3
	5.037,3215m^3	1.811,925m^3	737,971m^3	1.049,5m^3	5256,5m^3	

O plano actual de distribuição de combustível na região sul, cujo custo total de transporte está avaliado em **61.642.199,99 Kz**, apresenta-se no diagrama da figura abaixo.

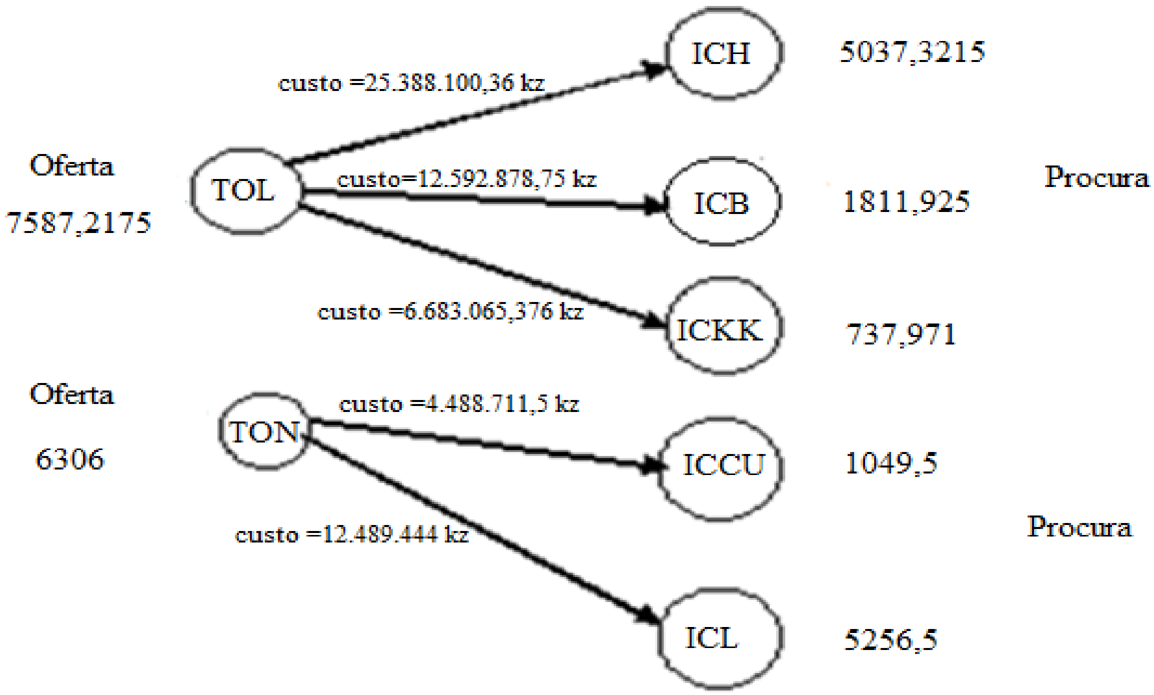


Figura 12: Estrutura da rede de distribuição actual da Sonangol na região sul.

Na dinâmica dos processos de produção, supõe-se a eventualidade da ocorrência de algum constrangimento em um dos terminais ou linhas de transporte, provocando riscos de privação do abastecimento de combustível.

Surge assim a necessidade da busca de um modelo alternativo, baseado em problemas de transportes que permita garantir a ininterrupção do abastecimento a todas as instalações da região, minimizando ou mantendo os actuais custos de transporte.

Com base a tabela de tarifas de frete de transporte que a sonangol usa entre uma província a outra e a distância entre as províncias onde se localizam os terminais e as instalações, calcularam-se os coeficientes de custos entre as 7 províncias e o coeficiente médio entre eles pela relação:

$Coef.de\ custo = \frac{D}{frete}$ onde D- é a distancia entre uma província a outra.

Daqui, obteremos $Coef(Benguela - Huambo) = \frac{D(Benguela-Huambo)}{frete} = \frac{310,7}{5040} = 0,06$

$$Coef(Benguela - Bié) = \frac{D(Benguela - Bié)}{frete} = \frac{606}{9950} = 0,08$$

$$Coef(Benguela - Cunene) = \frac{D(Benguela - Cunene)}{frete} = \frac{770}{8910} = 0,08$$

$$Coef(Benguela - Kuando\ Kubango) = \frac{D(Benguela - Kuando\ Kubango)}{frete}$$

$$= \frac{709{,}2}{9056} = 0{,}07$$

$$Coef(Benguela - Huíla) = \frac{D(Benguela - Huíla)}{frete} = \frac{388{,}5}{7429} = 0{,}05$$

$$Coef(Namibe - Cunene) = \frac{D(Namibe - Cunene)}{frete} = \frac{557{,}6}{4277} = 0{,}13$$

$$Coef(Namibe - Lubango) = \frac{D(Namibe - Lubango)}{frete} = \frac{214{,}7}{2376} = 0{,}09$$

Obtidos os coeficientes de custos, caculemos a média entre eles, $média(Coef.) = \frac{\sum Coef.}{7} = \frac{0{,}06+0{,}08+0{,}08+0{,}07+0{,}05+0{,}13+0{,}09}{7} = \frac{0{,}56}{7} = 0{,}08$.

Para todas as províncias envolvidas na região em estudo, determinam-se os novos fretes que correspondem aos custos unitários pela seguinte fórmula:

$frete = \frac{D}{média(Coef.)}$, Assim teremos

$$frete(Benguela - Huambo) = \frac{D(Benguela - Huambo)}{média(Coef.)} = \frac{310{,}7}{0{,}08} = 3883{,}75$$

$$frete(Benguela - Bié) = \frac{D(Benguela - Bié)}{média(Coef.)} = \frac{606}{0{,}08} = 7575$$

$$frete(Benguela - Cunene) = \frac{D(Benguela - Cunene)}{média(Coef.)} = \frac{770}{0{,}08} = 9625$$

$$frete(Benguela - Kuando\ Kubango) = \frac{D(Benguela - Kuando\ Kubango)}{média(Coef.)}$$

$$= \frac{709{,}2}{0{,}08} = 8865$$

$$frete(Benguela - Huíla) = \frac{D(Benguela - Huíla)}{frete} = \frac{388{,}5}{0{,}08} = 4856{,}25$$

$$frete(Namibe - Cunene) = \frac{D(Namibe - Cunene)}{frete} = \frac{557{,}6}{0{,}08} = 6970$$

$$frete(Namibe - Lubango) = \frac{D(Namibe - Lubango)}{frete} = \frac{214{,}7}{0{,}08} = 2683{,}75$$

Obtidos os fretes que são os custos unitários entre um centro de oferta para um centro de procura, a proposta para a alternativa de abastecimento sem interrupção, fica ilustrada no seguinte diagrama:

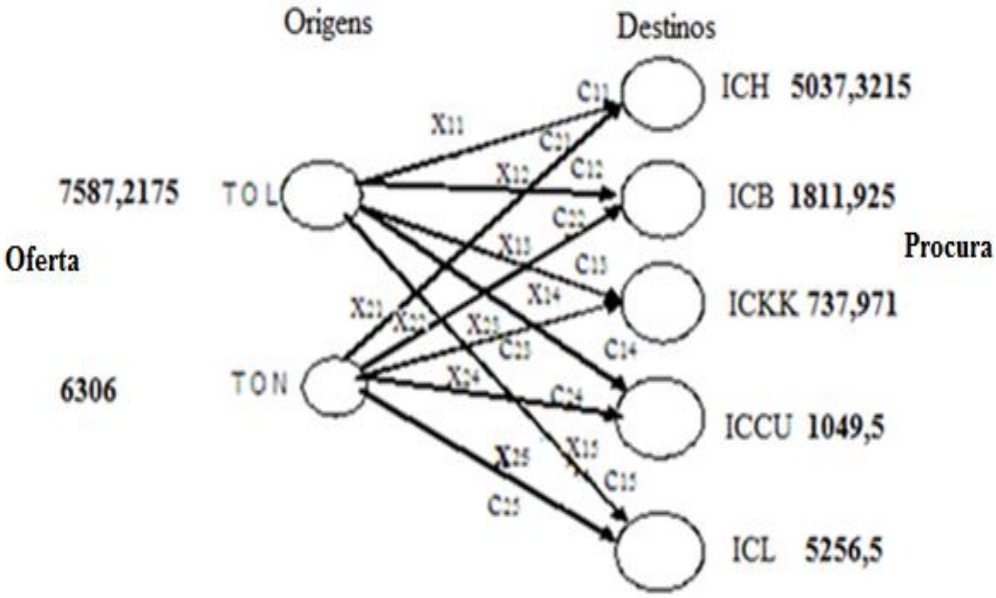


Figura13: Representação do novo plano de distribuição em forma de rede.

Onde: x_{11}-É a quantidade a ser transportada do TOL à ICH

x_{12}-É a quantidade a ser transportada do TOL à ICB

x_{13}-É a quantidade a ser transportada do TOL à ICKK

x_{14}-É a quantidade a ser transportada do TOL à ICCU

x_{15}-É a quantidade a ser transportada do TOL à ICL

x_{21}-É a quantidade a ser transportada do TON à ICH

x_{22}-É a quantidade a ser transportada do TON à ICB

x_{23}-É a quantidade a ser transportada do TON à ICKK

x_{24}-É a quantidade a ser transportada do TON à ICCU

x_{25}-É a quantidade a ser transportada do TON à ICL

c_{11}-É o custo de transportação de TOL à ICH

c_{12}-É o custo de transportação de TOL à ICB

c_{13}-É o custo de transportação de TOL à ICKK

c_{14}-É o custo de transportação de TOL à ICCU

c_{15}-É o custo de transportação de TOL à ICL

c_{21}-É o custo de transportação de TON à ICH

c_{22}-É o custo de transportação de TON à ICB

c_{23}-É o custo de transportação de TON à ICKK

c_{24}-É o custo de transportação de TON à ICCU

c_{25}-É o custo de transportação de TON à ICL

Sabendo que os fretes ora calculado são os custos c_{ij} $, com\ i = 1{,}2.\ j = 1{,}2, \dots ,5.$

Eis a estrutura de custos da proposta alternativa no quadro que segue:

	ICH	ICB	ICKK	ICCU	ICL	Oferta
TOL	X11 3883,75	X12 7575	X13 8865	X14 9625	X15 4856,25	7587,2175
TON	X21 7712,5	X22 12477,5	X23 8923,75	X24 6970	X25 2683,75	6306
Procura	5037,3215	1811,925	737,971	1049,5	5256,5	13893,22

Feito isso, a seguir formalizemos o modelo matemático do problema da distribuição conforme o problema de transporte:

$$Min.CT = 3883{,}75x_{11} + 7575x_{12} + 8865x_{13} + 9625x_{14} + 4856{,}25x_{15} \\ + 7712{,}5x_{21} + 12477{,}5x_{22} + 8923{,}75x_{23} + 6970x_{24} + 2683{,}75x_{25}$$

Sujeito a

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 7587{,}2175 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 6306 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 5037{,}3215 \\ x_{12} + x_{22} = 1811{,}925 \\ x_{13} + x_{23} = 737{,}971 \\ x_{14} + x_{24} = 1049{,}5 \\ x_{15} + x_{25} = 5256{,}5 \end{cases}$$

$x_{ij} \geq 0$; $i = 1{,}2.$ $j = 1{,}2, \ldots, 5$. Restrição de não negatividade

Uma vez que pretende-se determinar alternativas em caso de algum estrangulamento, na resolução do modelo acima, assume-se que existem dois percursos impossíveis (conforme 2.6.4), isto é, o combustível não pode ser transportado de determinado terminal para determinadas instalações por factores externos ou constrangimentos de natureza diversa, no modelo de programação linear esta impossibilidade surge quando em um dos percursos os custos são demasiados altos relativamente ao normal, para tal basta introduzir um parâmetro "M" (custo muito grande) no percurso onde não se deseja alocar o combustível.

Para o efeito, consideremos dois cenários:

Cenário 1:Impossiblidade no percurso TOL-ICKK

Neste cenário, apresenta-se a impossibilidade do Terminal Oceânico do Lobito fornecer combustível a instalação central do Kuando Kubango por qualquer eventualidade óbvia que possa surgir, esta impossibilidade matematicamente será representado por um parâmetro "M" que no problema representa um custo de transportação muito grande no percurso TOL-ICKK.

Cenário 2:Impossiblidade nos percursos TOL-ICKK; TON –ICL

Neste cenário, apresenta-se a impossibilidade do Terminal Oceânico do Lobito fornecer combustível a instalação central do Kuando Kubango e ao mesmo tempo do Terminal Oceânico do Namibe fornecer combustível a Instalação central do Lubango por uma eventual causa que possa surgir, esta impossibilidade matematicamente será representado por um parâmetro “M” que no problema representa um custo de transportação muito grande nos percursos TOL-ICKK e TON – ICL.

Assim sendo, para o cenário1consideremos o parâmetro “M”=1.000.000 da origem TOL ao destino ICKK, introduzindo $c_{13} = M = 1.000.000$ no modelo abaixo:

$$Min.CT = 3883{,}75x_{11} + 7575x_{12} + 1.000.000x_{13} + 9625x_{14} + 4856{,}25x_{15} + 7712{,}5x_{21} + 12477{,}5x_{22} + 8923{,}75x_{23} + 6970x_{24} + 2683{,}75x_{25}$$

Sujeito a

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 7587{,}2175 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 6306 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 5037{,}3215 \\ x_{12} + x_{22} = 1811{,}925 \\ x_{13} + x_{23} = 737{,}971 \\ x_{14} + x_{24} = 1049{,}5 \\ x_{15} + x_{25} = 5256{,}5 \end{cases}$$

$x_{ij} \geq 0\,;\ i = 1{,}2.\ j = 1{,}2,\dots,5.$ Restrição de não negatividade

• Determinação da solução básica admissível (SBA)

Determinemos a SBA do problema pelo método do custo mínimo, para tal, o número de variáveis básicas esperadas é dado por: m+n-1= 2+5-1=7-1=6. Neste caso esperam-se 6 V.B.

Para determinar a SBA inicial, consideremos o quadro abaixo:

	ICH	ICB	ICKK	ICCU	ICL	Oferta
TOL	X_{11} 3883,75	X_{12} 7575	X_{13} 1.000.000	X_{14} 9625	X_{15} 4856,25	7587,2175
TON	X_{21} 7712,5	X_{22} 12477,5	X_{23} 8923,75	X_{24} 6970	X_{25} 2683,75	6306
Procura	5037,3215	1811,925	737,971	1049,5	5256,5	13893,22

Conforme o quadro acima vem:

Primeira VB: o menor dos custos é c_{25}, pelo que x_{25} = min{6306;5256,5} = 5256,5. O destino 5 fica totalmente satisfeito.

Segunda VB: o menor dos custos é c_{11}, pelo que x_{11} = min{7587,2175;5037,32150} = 5037,3215. O destino 1fica totalmente satisfeito.

Terceira VB: o menor dos custos é c_{12}, pelo que x_{12} = min {2549,896;1811,925} = 1811,925. O destino 2 fica totalmente satisfeito.

Quarta VB: o menor dos custos é c_{24}, pelo que x_{24} = min {1049,5;1049,5} = 1049,5. O destino 4 fica totalmente satisfeito.

Quinta VB: o menor dos custos é c_{13}, pelo que x_{13} = min {737,971;737,971} = 737,971. O destino 3 fica totalmente satisfeito.

Obs. Como encontramos apenas 5 VB, estamos diante de uma SBA degenerada.

Daqui, a SBA encontrada para o problema é:

X= (5037,3215;1811,925;737,971;0;0;0;0;0;1049,5;5256,5).

Pelo que, substituindo a solução obtida na função objectivo temos:

CT=3883,75 $\times$ 5037,3215+7575$\times$1811,925+1.000.000$\times$ 737,971+6970$\times$ 1049,5+2683,75$\times$ 5256,5 = 79.268.2176,1.

Agora vamos testar se a solução obtida já é óptima, para tal, consideremos o seguinte quadro da SBA encontrada:

5037,3215	1811,925	737,971		
			1049,5	5256,5

Extraindo as equações duais para as variáveis básicas temos:

x_{11} $\qquad c_{11} - u_1 - v_1 = 0 \Longrightarrow 3883{,}75 - u_1 - v_1 = 0$

x_{12} $\qquad c_{12} - u_1 - v_2 = 0 \Longrightarrow 7575 - u_1 - v_2 = 0$

x_{13} $\qquad c_{13} - u_1 - v_3 = 0 \Longrightarrow 1.000.000 - u_1 - v_3 = 0$

x_{21} $\qquad c_{21} - u_2 - v_1 = 0 \Longrightarrow 7712{,}5 - u_2 - v_1 = 0$

$$x_{24} \qquad c_{24} - u_2 - v_4 = 0 \Longrightarrow 6970 - u_2 - v_4 = 0$$

$$x_{25} \qquad c_{25} - u_2 - v_5 = 0 \Longrightarrow 2683{,}75 - u_2 - v_5 = 0$$

Fazendo

$u_1 = 0$ obtemos $u_2 = 3828; v_1 = 3883{,}75; v_2 = 3883{,}75; v_3 = 1.000.000; v_4 = 3141{,}25; v_5 = -1145$.

Para testarmos se a solução é óptima, usamos o método de Modi (conforme abordado em 2.6.2), assim temos:

$$x_{14} \qquad c_{14} - u_1 - v_4 = 9625 - 0 - 3141{,}25 = 6483{,}75$$

$$x_{15} \qquad c_{15} - u_1 - v_5 = 4856{,}25 - 0 - (-1145) = 6001{,}25$$

$$x_{21} \qquad c_{21} - u_2 - v_1 = 12477{,}5 - 3828{,}75 - 3883{,}75 = 4765$$

$$x_{23} \qquad c_{23} - u_2 - v_3 = 8923{,}75 - 3883{,}75 - 1.000.000 = -994960.$$

Observa-se que para a célula da VNB x_{23} , se verifica $c_{23} - u_2 - v_3 < 0$, então a solução encontrada ainda não é óptima.

Para determinarmos a solução óptima utilizamos o solver, disponível na folha de cálculo Excel, da Microsoft.

Assim sendo, através do solver obtemos a solução óptima dado no seguinte quadro relatório de respostas:

Valor mínimo final do CT	
62.899.886,83	

Variáveis de decisão	Valor Final
X_{11}	5037,3215
X_{12}	1811,925
X_{13}	0
X_{14}	0
X_{15}	737,971
X_{21}	0
X_{22}	0
X_{23}	737,971
X_{24}	1049,5
X_{25}	4518,529

•Interpretação da solução obtida

De acordo o relatório de resposta, indica-nos que, em caso de haver algum estrangulamento na rede de distribuição, no percurso TOL-ICKK, a sonangol Logística deve se proceder da seguinte maneira para satisfazer as necessidades dos consumidores:

• TOL deve fornecer a ICH a quantidade de 5037,3215 m^3de gasolina.

•TOL deve fornecer a ICB a quantidade de 1811,925 m^3de gasolina.

•TOL deve fornecer a ICL a quantidade de 737,971 m^3de gasolina.

•TON deve fornecer a ICKK a quantidade de 737,971 m^3de gasolina.

•TON deve fornecer a ICCU a quantidade de 1049,5 m^3de gasolina.

•TON deve fornecer a ICL a quantidade de 4518,529 m^3de gasolina.

Procedendo segundo este plano de distribuição, o custo total gerado para o transporte das quantidades acima designadas por meio do modelo matemático por um período quinzenal, será de **62.899.886,83 Kz**.

Quadro comparativo de custos de transportação

Custo de transportação na situação actual (quinzenal)	Custo de transportação do modelo Matemático (quinzenal)	Diferença
61.642.199,99 Kz	**62.899.886,83 Kz**	**1.257.686,84 Kz**

Agora vamos analisar o cenário 2,para o efeito consideremos o parâmetro “M”=1.000.000 da origem TOL ao destino ICKK, introduzindo $c_{13} = M = 1.000.000$ e da origem TON ao destino ICL, introduzindo$c_{25} = M = 1.000.000$ no modelo abaixo:

$$Min. CT = 3883{,}75x_{11} + 7575x_{12} + 1.000.000x_{13} + 9625x_{14} + 4856{,}25x_{15} + 7712{,}5x_{21} + 12477{,}5x_{22} + 8923{,}75x_{23} + 6970x_{24} + 1.000.000x_{25}$$

Sujeito a

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 7587{,}2175 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 6306 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 5037{,}3215 \\ x_{12} + x_{22} = 1811{,}925 \\ x_{13} + x_{23} = 737{,}971 \\ x_{14} + x_{24} = 1049{,}5 \\ x_{15} + x_{25} = 5256{,}5 \end{cases}$$

$x_{ij} \geq 0$; $i = 1{,}2.$ $j = 1{,}2, \ldots ,5.$ Restrição de não negatividade.

• Determinação da solução básica admissível (SBA)

Determinemos a SBA do problema pelo método do custo mínimo, para tal, o número de variáveis básicas esperadas é dado por: m+n-1= 2+5-1=7-1=6. Neste caso esperam-se 6 V.B.

Para determinar a SBA inicial, consideremos o quadro abaixo:

	ICH	ICB	ICKK	ICCU	ICL	Oferta
TOL	X_{11} 3883,75	X_{12} 7575	X_{13} 1.000.000	X_{14} 9625	X_{15} 4856,25	7587,2175
TON	X_{21} 7712,5	X_{22} 12477,5	X_{23} 8923,75	X_{24} 6970	X_{25} 1.000.000	6306
Procura	5037,3215	1811,925	737,971	1049,5	5256,5	13893,22

Conforme o quadro acima vem:

Primeira VB: o menor dos custos é c_{11}, pelo que x_{11} = min {7587,2175;5037,3215} = 5037,3215. O destino 1 fica totalmente satisfeito.

Segunda VB: o menor dos custos é c_{15}, pelo que x_{15} = min{2549,896;5256,5} = 2549,896. O destino 5 não fica totalmente satisfeito.

Terceira VB: o menor dos custos é c_{24}, pelo que x_{24} = min {6306;1045,5} = 1049,5. O destino 4 fica totalmente satisfeito.

Quarta VB: o menor dos custos é c_{23}, pelo que x_{23} = min {5256,5;737,971} = 737,971. O destino 3 fica totalmente satisfeito.

Sexta VB: uma vez que já não existe nenhuma outra variável, além dex_{25},ela é a ultima VB, não obstante ao custo bastante elevado. x_{25} = min {2706,604;2706,604} = 2706,604. O destino 5 fica totalmente satisfeito.

Daqui, a SBA encontrada para o problema é:

X= (5037,3215;0;0;0;2549,896;0;1811,925;737,971;1049,5;2706,604).

Pelo que, substituindo a solução obtida na função objectivo temos:

CT=3883,75 × 5037,3215+4856,25×2549,896+12477,5× 1811,925+8923,75× 737,971+ 6970× 1049,5 +1.000.000× 2706,604 = 2.775.059.407,724375kz

Agora vamos testar se a solução obtida é óptima, para tal, consideremos o seguinte quadro da SBA encontrada:

5037,3215				2549,896
	1811,925	737,971	1049,5	2706,604

Extraindo as equações duais para as variáveis básicas temos:

$$x_{11} \qquad c_{11} - u_1 - v_1 = 0 \Longrightarrow 3883{,}75 - u_1 - v_1 = 0$$

$$x_{15} \qquad c_{15} - u_1 - v_5 = 0 \Longrightarrow 4856{,}25 - u_1 - v_5 = 0$$

$$x_{22} \qquad c_{22} - u_2 - v_2 = 0 \Longrightarrow 12477{,}5 - u_2 - v_2 = 0$$

$$x_{23} \qquad c_{23} - u_2 - v_3 = 0 \Longrightarrow 8923{,}75 - u_2 - v_3 = 0$$

$$x_{24} \qquad c_{24} - u_2 - v_4 = 0 \Longrightarrow 6970 - u_2 - v_4 = 0$$

$$x_{25} \qquad c_{25} - u_2 - v_5 = 0 \Longrightarrow 1.000.000 - u_2 - v_5 = 0$$

Fazendo $u_1 = 0$ obtemos $u_2 = 995143{,}75$;$v_1 = 3883{,}75$;$v_2 = -982666{,}25$;$v_3 = -986220$;$v_4 = -988173{,}75$;$v_5 = 4856{,}25$.

Para testarmos se a solução é óptima, usamos o método de Modi (conforme abordado em 2.6.2), assim temos:

$$x_{12} \qquad c_{12} - u_1 - v_2 = 7575 - 0 + 982666{,}25 = 990241{,}25$$

$$x_{13} \qquad c_{13} - u_1 - v_3 = 1.000.000 - (-986220) = 1986220$$

$$x_{14} \qquad c_1 - u_1 - v_4 = 9625 - (-988173{,}75) = 997798{,}75$$

$$x_{21} \qquad c_{21} - u_2 - v_1 = 7712{,}5 - 995143{,}75 - 3883{,}75 = -991315.$$

Observa-se que para a célula da VNB x_{21} , se verifica $c_{21} - u_2 - v_1 < 0$, então a solução encontrada ainda não é óptima.

De igual modo neste cenário, determinamos a solução óptima utilizando o solver, assim sendo, obtemos a solução no seguinte quadro relatório de respostas:

Valor mínimo final do CT
90.016.709,00

Variáveis de decisão	Valor Final
X11	518,7925
X12	1811,925
X13	0
X14	0
X15	5256,5
X21	4518,529
X22	0
X23	737,971
X24	1049,5
X25	0

• Interpretação da solução obtida

De acordo o quadro relatório de resposta, indica-nos que, em caso de haver algum estrangulamento na rede de distribuição actual, no percurso TOL-ICKK e ao mesmo tempo no percurso TON-ICL a sonangol Logística deve se proceder da seguinte maneira para satisfazer as necessidades dos consumidores:

• TOL deve fornecer a ICH a quantidade de 518,7925 m^3de gasolina.

•TOL deve fornecer a ICB a quantidade de 1811,925 m^3de gasolina.

•TOL deve fornecer a ICL a quantidade de 5256,5m^3de gasolina.

•TON deve fornecer a ICH a quantidade de 4518,529 m^3de gasolina.

•TON deve fornecer a

ICKK a quantidade de 737,971m^3de gasolina.

•TON deve fornecer a ICCU a quantidade de 1049,5 m^3de gasolina.

Procedendo segundo este plano de distribuição, o custo total gerado para o transporte das quantidades acima designadas por meio do modelo matemático por um período quinzenal, será de **90.016.709,00 Kz**.

Quadro comparativo de custos de transportação

Custo de transportação na situação actual (quinzenal)	Custo de transportação do modelo Matemático (quinzenal)	Diferença
61.642.199,99 Kz	**90.016.709,00 Kz**	**28.374.509,01 Kz**

• Validação das Hipóteses versus Interpretação Económica

De acordo as soluções encontradas tanto no cenário 1 quanto o cenário 2, isto é em caso de haver algum estrangulamento na estrutura actual de distribuição de combustível na região sul.

Assim, conforme os cenários estudados, para validar a hipótese inicial de que o problema de transporte tem sempre solução óptima possível, Segundo cenário 1, se porventura haver algum estrangulamento no percurso TOL – ICKK, a alternativa para satisfazer a necessidade do ICKK será o TON.

Segundo cenário 2, se acontecer algum estrangulamento simultaneamente no percurso TOL- ICKK e TON – ICL, a alternativa para satisfazer a necessidade do ICKK será o TON e a alternativa para satisfazer a necessidade do ICL será o TOL.

Pode-se compreender que seria vantajoso de ponto de vista económico optar no modelo alternativo, uma vez havendo algum estrangulamento na situação actual em um dos percursos, as províncias em causa não seriam afectado devido este plano. Por outro lado, sem o plano alternativo, procedendo-se de forma intuitiva ou instantânea, entende-se que a Sonangol teria mais custos relativamente ao do modelo matemático, consequentemente isto afectaria as províncias em causa a nível económico e social, uma vez que na falta de combustível nestas províncias, vai implicar no baixo rendimento socioeconómico e do nível de industrialização, e este por sua vez é um factor preponderante ao desenvolvimento de um país.

CONCLUSÕES

Após compreensão do funcionamento da estrutura actual de distribuição de combustível da Sonangol na região sul, em que constatou-se a não existência de um plano alternativo em caso de algum estrangulamento na estrutura, neste trabalho, com a concepção de um modelo Matemático estudados em dois cenários, sendo o primeiro caracterizado pela possibilidade de um estrangulamento no percurso TOL-ICKK e o segundo, considerando um possível estrangulamento nos percursos TOL-ICKK e TON-ICL respectivamente. Chegou-se as seguintes conclusões:

1.Se acontecer algum estrangulamento no percurso TOL – ICKK, a alternativa para satisfazer a necessidade do ICKK será o TON.

2.Se acontecer algum estrangulamento simultaneamente no percurso TOL- ICKK e TON – ICL, a alternativa para satisfazer a necessidade do ICKK será o TON e a alternativa para satisfazer a necessidade do ICL será o TOL.

3.Em caso de ocorrer algum estrangulamento na estrutura actual de distribuição de combustível na região sul, fica assegurado que as províncias (destinos) receberão as quantidades capazes de suprir as suas necessidades.

4.Do ponto de vista económico é vantajoso optar no modelo alternativo que apresentamos caso haja algum estrangulamento na situação actual em um dos percursos, pois assim, as províncias não teriam constrangimentos no consumo de combustíveis.

RECOMENDAÇÕES

1. Que os estudos e resultados alcançados neste trabalho sirva de avaliação aos gestores da Sonangol para possível aplicabilidade na eventualidade de um estrangulamento em um dos percursos.
2. Que se melhore as estradas que interligam as províncias de modo a facilitar a locomoção.
3. Sendo um trabalho de pesquisa académica com impacto social, que se considere a possibilidade de estudos semelhantes serem feitos a outras regiões do país, por académicos ou profissionais.
4. Uma vez que o presente trabalho foi feito mediante a cadeira de Investigação Operacional, que já não faz parte do plano curricular do curso de Matemática na Faculdade de Ciências, que se crie condições no sentido dela ser incluída novamente, pois, é uma área da Matemática aplicada muito promissora e que resolve problemas muito interessantes do mundo real cujos resultados se reflecte na comunidade.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Liston, P; Silva, M, 2005,A importância da Mic nos cursos de graduação, 1ªEdição,Brasil,10p.

[2]Ferreira,F;Bachega,S, 2011,Programação Linear:Um estudo de caso sobre os custos de transporte em uma empresa do Sector de confecção de Catalão-Go,Brasil,14p.

[3] Oliveira,L,2013,Metodologia do Trabalho de Fim de Curso,Brasil,97p.

[4]Ferrer,W,2010,Metodologia da Pesquisa Cientifica,Brasil,54p.

[5] N'Landu, D, 2008,Metodologia de Investigação e de redacção de um trabalho científico, Angola, 71p.

[6]Sinha,S;Elsevier,2006,Mathematical Programming Theory and Methods,U.S.A,1ªEdição,567p.

[7]Sharma, S, 2006, Operation Research Theory of games and travelling root problem, India, 1ªEdição, 253p.

[8]Natarajan,A, A, A; Balasubramani, 2006,Operations Research, Índia, 2006,1ªEdição,738p.

[9]Carvalho,J,2009,Metodologia do trabalho científico,«Saber fazer» da investigação para dissertações e teses,Brasil,2ªEdição,177p.

[10] Marconi, M; Lakatos, E, 2009,Metodologia de investigação ciêntifica, Brasil, 4ªEdição,305p.

[11]Hill,M; Da Costa,M,2009,Investigação Operacional - Programação Linear-Vol.1Lisboa, 2ªEdição,529p.

[12] Mital, K; Mohan, C, 1996,Optimization Methods Operations Research and SistemsAnalysis, Índia, 3ª edição,381p.

[13]http://WWW.Google, Gestor de Buscas

[14]http://WWW.Portal de Angola.com

[15]Álvarez, C.1995, La Escuela en la Vida. De. Universidad San Francisco Javier, Sucre.Bolivia.

[16]Alonso, I. 2001, La resolución de problemas matemáticos. Una alternativa didáctica centrada en la representación. Tesis en opción al grado de Doctor en Ciencias

Pedagógicas.

[17]Schoenfeld, A. 1985, Mathematical Problem Solving.Academic Press, New York

[18]Schoenfeld, A. 1987, Cognitive Science and Mathematics Education.Lawrence Erlbaum Associated.

[19]GUZMÁN, M.1994, Para pensar mejor. Desarrollo dela creatividad através de los procesos matemáticos. Pirámide, Madrid.

[20]Chi, M. y Glaser, R.1986, «Capacidad de resolución de problemas», en R. f. Sternerg, Las capacidades humanas. Un enfoque desde el procesamiento de la información, Barcelona, Labor. pp. 303-324.

[21]Polya,G.1965,Cómo plantear y resolver problemas,Editorial Trillas México,D.F.

[22]Majmutov, M.I.198, La enseñanza problémica, La Habana, editorial pueblo y educación.

[23]Ballester,P.et al,1992,Metodologia de la enseñanza de la matemática tomo I,II,ciudad de La Habana, editorial pueblo y educacion.

[24]Labarrere,S. Alberto F.1994,Sobre la formulación de problemas matemáticos por los escolares,En revista educación 36,La Habana,editorial pueblo y educaión.

ANEXO 1

1.1.Planilhas da formulação Matemática do modelo de transporte com a ferramenta Solver do Excel.

Função Objectivo												
Variáveis	X11	X12	X13	X14	X15	X21	X22	X23	X24	X25		
Valor	3883,75	7575	1000000	9625	4856,25	7712,5	12477,5	8923,75	6970	2683,75		
Resultado	5037,3215	1811,925	0	0	737,971	0	0	737,971	1049,5	4518,529		
Fórmula	62899886,83											
Restrições	X11	X12	X13	X14	X15	X21	X22	X23	X24	X25	LHC	RHC
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	7587,218	7587,2175
2	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	6306	6306
3	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	5037,322	5037,3215
4	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1811,925	1811,925
5	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	737,971	737,971
6	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1049,5	1049,5
7	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	5256,5	5256,5

Cenário 1

Função Objectivo												
Variáveis	X11	X12	X13	X14	X15	X21	X22	X23	X24	X25		
Valor	3883,75	7575	1000000	9625	4856,25	7712,5	12477,5	8923,75	6970	1000000		
Resultado	518,7925	1811,925	0	0	5256,5	4518,529	0	737,971	1049,5	0		
Fórmula	90016709											
Restrições	X11	X12	X13	X14	X15	X21	X22	X23	X24	X25	LHC	RHC
1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	7587,218	7587,218
2	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	6306	6306
3	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	5037,322	5037,322
4	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1811,925	1811,925
5	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	737,971	737,971
6	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	1049,5	1049,5
7	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	5256,5	5256,5

Cenário 2

1.2. Planilhas de Análise de Sensibilidade do Solver

Microsoft Excel 14.0 Relatório de Sensibilidade
Planilha: [cenário 1.xlsx]Plan1
Relatório Criado: 13-11-2015 17:27:20

Células Variáveis

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permitido Aumentar	Permitido Reduzir
B4	Resultado X11	5037,3215	0	3883,75	6001,25	1E+30
C4	Resultado X12	1811,925	0	7575	7075	1E+30
D4	Resultado X13	0	988903,75	1000000	1E+30	988903,75
E4	Resultado X14	0	482,5	9625	1E+30	482,5
F4	Resultado X15	737,971	0	4856,25	482,5	6001,25
G4	Resultado X21	0	6001,25	7712,5	1E+30	6001,25
H4	Resultado X22	0	7075	12477,5	1E+30	7075
I4	Resultado X23	737,971	0	8923,75	988903,75	1E+30
J4	Resultado X24	1049,5	0	6970	482,5	1E+30
K4	Resultado X25	4518,529	0	2683,75	6001,25	482,5

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lateral R.H.	Permitido Aumentar	Permitido Reduzir
M10	LHC	1811,925	-1567,5	1811,925	737,971	2,27374E-13
M11	LHC	737,971	1953,75	737,971	1049,5	2,27374E-13
M12	LHC	1049,5	0	1049,5	2,27374E-13	1E+30
M13	LHC	5256,5	-4286,25	5256,5	1049,5	2,27374E-13
M7	LHC	7587,2175	9142,5	7587,2175	2,27374E-13	737,971
M8	LHC	6306	6970	6306	2,27374E-13	1049,5
M9	LHC	5037,3215	-5258,75	5037,3215	737,971	2,27374E-13

Microsoft Excel 14.0 Relatório de Sensibilidade
Planilha: [Cenário2.xlsx]Plan1
Relatório Criado: 13-11-2015 20:24:46

Células Variáveis

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permitido Aumentar	Permitido Reduzir
B4	Resultado X11	518,7925	0	3883,75	3770	1073,75
C4	Resultado X12	1811,925	0	7575	1073,75	1E+30
D4	Resultado X13	0	3770	8865	1E+30	3770
E4	Resultado X14	0	6483,75	9625	1E+30	6483,75
F4	Resultado X15	5256,5	0	4856,25	991315	1E+30
G4	Resultado X21	4518,529	0	7712,5	1073,75	3770
H4	Resultado X22	0	1073,75	12477,5	1E+30	1073,75
I4	Resultado X23	737,971	0	8923,75	3770	1E+30
J4	Resultado X24	1049,5	0	6970	6483,75	1E+30
K4	Resultado X25	0	991315	1000000	1E+30	991315

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lateral R.H.	Permitido Aumentar	Permitido Reduzir
M10	LHC	1811,925	4433,75	1811,925	518,7925	2,27374E-13
M11	LHC	737,971	1953,75	737,971	1049,5	2,27374E-13
M12	LHC	1049,5	0	1049,5	2,27374E-13	1E+30
M13	LHC	5256,5	1715	5256,5	518,7925	2,27374E-13
M7	LHC	7587,2175	3141,25	7587,2175	2,27374E-13	518,7925
M8	LHC	6306	6970	6306	2,27374E-13	1049,5
M9	LHC	5037,3215	742,5	5037,3215	1049,5	2,27374E-13

1.3.Planilhas de Relatório de Limites do Solver

Microsoft Excel 14.0 Relatório de Limites
Planilha: [cenário 1.xlsx]Plan1
Relatório Criado: 13-11-2015 17:30:48

	Objetivo	
Célula	Nome	Valor
B5	Fórmula X11	6E+07

	Variável		Inferior	Objetivo	Superior	Objetivo
Célula	Nome	Valor	Limite	Resultado	Limite	Resultado
B4	Resultado X11	5037	5037,32	62899887	5037,32	62899887
C4	Resultado X12	1812	1811,93	62899887	1811,93	62899887
D4	Resultado X13	0	0	62899887	0	62899887
E4	Resultado X14	0	0	62899887	0	62899887
F4	Resultado X15	738	737,971	62899887	737,971	62899887
G4	Resultado X21	0	0	62899887	0	62899887
H4	Resultado X22	0	0	62899887	0	62899887
I4	Resultado X23	738	737,971	62899887	737,971	62899887
J4	Resultado X24	1050	1049,5	62899887	1049,5	62899887
K4	Resultado X25	4519	4518,53	62899887	4518,53	62899887

Microsoft Excel 14.0 Relatório de Limites
Planilha: [Cenário2.xlsx]Plan1
Relatório Criado: 13-11-2015 20:25:47

	Objetivo	
Célula	Nome	Valor
B5	Fórmula X11	9E+07

	Variável		Inferior	Objetivo	Superior	Objetivo
Célula	Nome	Valor	Limite	Resultado	Limite	Resultado
B4	Resultado X11	518,8	518,793	90016709	518,793	90016709
C4	Resultado X12	1812	1811,93	90016709	1811,93	90016709
D4	Resultado X13	0	0	90016709	0	90016709
E4	Resultado X14	0	0	90016709	0	90016709
F4	Resultado X15	5257	5256,5	90016709	5256,5	90016709
G4	Resultado X21	4519	4518,53	90016709	4518,53	90016709
H4	Resultado X22	0	0	90016709	0	90016709
I4	Resultado X23	738	737,971	90016709	737,971	90016709
J4	Resultado X24	1050	1049,5	90016709	1049,5	90016709
K4	Resultado X25	0	0	90016709	0	90016709

ANEXO 2

Tabela de tarifas de preços da Sonangol de transportação e distribuição de combustível.

Sonangol
Logística

TABELA DE TARIFAS DE 2015 (KM/M3)

ORIGEM	DESTINO	VALOR AKZ
LUANDA		01.04.2015
	Lucala	3.505
	Uíge	4.832
	Malange	5.405
	Soyo	5.940
	Saurimo	11.880
	Lucapa	11.880
	Moxico	13.150
LOBITO		
	Huambo	5.040
	Kuito	6.950
	Topa	3.296
	Cunene	8.910
	Namibe	6.384
	Lubango	7.429
	Menongue	9.056
MALANGE		
	Moxico	5.999
	Saurimo	5.940
	Lucapa	5.999
HUAMBO		
	Kuito	2.282
	Menongue	5.012
TOPA		
	Lucapa	12.556
	Saurimo	12.241
	Kuito	8.777
	Lucala	4.992
	Uige	11.256
	Huambo	7.755
	Menongue	6.266
	Moxico	12.150
	Luanda	4.203
	Lubango	8.306
	Lobito	4.022
	Malange	6.831
NAMIBE		
	Cunene	4.277
	Lubango	2.376

ANEXO 3

Tabela de Transportação e distribuição de combustível durante o Mês de Outubro de 2015 na região Sul.

Sonangol
Logística

Soma de Quantidade movimentada do material				
Rótulos de Linha	GASOLINA	JET-A1	PETROLEO	Outubro Total
TOL	**15174,435**	**253,994**		**34021,483**
ICB	3623,85			8711,964
ICH	10074,643	145,995		20464,492
ICKK	1475,942	107,999		4845,027
TON	**12612**		**209,5384**	**31300,53839**
ICCU	2099			5149
ICL	10513		209,5384	26151,53839

TOL-Terminal Oceánico do Lobito

TON-Terminal Oceánico do Namibe

ICB-Instalação Central do Bié

ICH-Instalação Central do Huambo

ICKK-Instalação Central do Kuando Kubango

ICCU-Instalação Central do Cunene

ICL-Instalação Central do Lubango