

UNIVERSIDADE TIRADENTES

ANTÔNIO VITOR BARBOSA FERNANDES

**PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA O DIMENSIONAMENTO DE VIGAS  
RETANGULARES DE CONCRETO ARMADO CONFORME A NBR 6118:2014**

ARACAJU

2016

ANTÔNIO VITOR BARBOSA FERNANDES

PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA O DIMENSIONAMENTO DE VIGAS  
RETANGULARES DE CONCRETO ARMADO CONFORME A NBR 6118:2014

Monografia apresentada à  
Universidade Tiradentes como  
um dos pré-requisitos para a  
obtenção do grau de bacharel  
em Engenharia Civil.

Orientador: Prof. MSc. Vinicius Costa Correia  
Co-orientador: Prof. MSc. Cassius Gomes De Oliveira

ARACAJU

2016

ANTÔNIO VITOR BARBOSA FERNANDES

PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA O DIMENSIONAMENTO DE VIGAS  
RETANGULARES DE CONCRETO ARMADO CONFORME A NBR 6118:2014

Monografia apresentada ao curso de Engenharia Civil da Universidade Tiradentes – UNIT, como requisito parcial para obtenção do grau de bacharel em Engenharia Civil.

Aprovada em: **30 / 11 / 2016**

Banca Examinadora

---

Prof. MSc. Vinicius Costa Correia  
(Universidade Tiradentes - UNIT)

---

Prof. MSc. Cassius Gomes de Oliveira  
(Universidade Tiradentes - UNIT)

---

Prof. DSc. David Leonardo Nascimento de Figueiredo Amorim  
(Universidade Federal de Sergipe - UFS)

Dedico este trabalho a meus pais, irmão,  
namorada e a todas as pessoas que  
confiaram na minha capacidade.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente agradeço a Deus pelo dom da vida, por ter me concedido fé e perseverança para não desistir dos meus objetivos.

Aos meus pais, Antônio José Fernandes Sousa e Maria de Fátima Barbosa Fernandes, por todo amor, dedicação, apoio moral e financeiro.

Ao meu irmão Ítalo José Barbosa Fernandes, além de tudo amigo, mesmo que distante, sempre que precisei esteve comigo.

A minha namorada Fernanda Vita Argôlo Oliveira que sempre foi minha companheira, amiga e incentivadora, me mostrando com suas palavras o lado bom das coisas.

A todos meus familiares, amigos e colegas, pelos conselhos e palavras de incentivo, tornando o dia-a-dia mais agradável e descontraído.

A todos os mestres que tive em toda a minha vida, que repassaram seus ensinamentos e em especial ao meu orientador Vinicius Costa Correia e co-orientador Cassius Gomes De Oliveira, pela paciência, pela disponibilidade e pelo acompanhamento exercido ao longo dessa jornada.

A todos os profissionais que tive a honra de conviver, onde aprendi com seus conhecimentos e experiências.

Enfim, a todos que contribuíram de alguma forma pela concretização desse sonho de tornar-me um Engenheiro Civil.

*“Educação é aquilo que fica depois que  
você esquece o que a escola ensinou”*

*(Albert Einstein)*

FERNANDES, A. V. B. **Programa computacional para o dimensionamento de vigas retangulares de concreto armado conforme a NBR 6118:2014**. 2016. 143p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Tiradentes, Aracaju, 2016.

## RESUMO

No dimensionamento de estruturas de concreto armado, umas das etapas mais importantes é o dimensionamento de vigas submetidas à flexão simples e força cortante, que quando calculado de forma analítica, muitas das vezes pode se tornar uma atividade cansativa, trabalhosa e sujeita a erros. Por isso é fundamental a utilização de softwares que auxiliem nesse processo. Neste sentido, o objetivo geral deste trabalho consiste em desenvolver uma programação que seja capaz de dimensionar vigas retangulares de concreto armado submetidas às solicitações de flexão simples e força cortante, atendendo aos requisitos da NBR 6118:2014 – Projeto de estruturas de concreto. Inicialmente foi utilizado o Microsoft Office Excel para a realização dos cálculos e estudo, como forma de identificar possíveis problemas na formulação, logo após foi criado um algoritmo e lançado para a linguagem do software Scilab. A eficácia do aplicativo foi comprovada através de comparação com resoluções analíticas. Com isso foi possível inferir que a automatização do dimensionamento de vigas retangulares de concreto armado atingiu as metas propostas em termos de funcionalidade, obtendo-se resultados satisfatórios.

**Palavras-chave:** Concreto armado. Vigas retangulares. Lógica de Programação. Scilab.

FERNANDES, A. V. B. **Programa computacional para o dimensionamento de vigas retangulares de concreto armado conforme a NBR 6118:2014**. 2016. 143p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil) – Universidade Tiradentes, Aracaju, 2016.

### **ABSTRACT**

One of the most important steps of designing reinforced concrete is the dimensioning of beams subjected to simple bending moment and shear force. When the design is followed by an analytical calculation, it can turn into a tiring and laborious activity subjected to mistakes. Thus, using computer programs is essential to assist with this process. In this regard, the general goal of this work consists in developing a software which is capable of designing rectangular reinforced concrete beams submitted to simple bending moment and shear force, in compliance with the NBR 6118:2014 – Projeto de estruturas de concreto. Firstly, it was used Microsoft Office Excel for a previous calculus study, as a way to identify potential problems in the coding procedures. Next, it was created an algorithm to be imported to Scilab software. The efficiency of the app was verified throughout comparison with analytical resolutions. Thereby it was concluded that the automation of designing rectangular reinforced concrete beams achieved its goals in terms of functionality, producing good results.

**Key-words:** Reinforced concrete; Rectangular beams; Programming logic; Scilab.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Foto real do barco de Joseph-Louis Lambot.....	26
Figura 2 – Viga em balanço.....	31
Figura 3 – Viga bi-apoiada .....	31
Figura 4 – Viga biengastada.....	31
Figura 5 – Viga gerber.....	32
Figura 6 – Viga contínua .....	32
Figura 7 – Viga balcão .....	32
Figura 8 – Viga-coluna .....	33
Figura 9 – Esforços externos em uma viga bi apoiada.....	37
Figura 10 – Demonstração da armadura de tração ( $A_s$ ) e de compressão ( $A'_s$ ) em uma viga.....	39
Figura 11 – Tipos básicos de armaduras de viga.....	40
Figura 12 – Viga biapoiada e diagramas de esforços solicitantes.....	44
Figura 13 – Comportamento da seção transversal de uma viga de concreto armado na flexão normal simples.....	45
Figura 14 – Diagrama de tensões no concreto no estado-limite último.....	46
Figura 15 – Domínios de estado-limite último de uma seção transversal .....	47
Figura 16 – Zonas de dimensionamento em função da deformação no aço .....	48
Figura 17 – Vão efetivo .....	55
Figura 18 – Arredondamento do diagrama de momento fletor .....	56
Figura 19 – Dimensões da seção transversal de uma viga retangular .....	57
Figura 20 – Altura da linha neutra .....	58
Figura 21 – Elemento de seção retangular e diagramas de deformações e tensões na seção solicitada para flexão simples para concretos de todas as classes .....	62
Figura 22 – Relação entre a posição da linha neutra e a altura útil.....	64
Figura 23 – Seção de uma viga com armadura dupla.....	66

Figura 24 – Ruptura de viga por rompimento do banzo superior comprimido do concreto .....	71
Figura 25 – Ruína da viga por rompimento dos estribos.....	72
Figura 26 – Modo de ruptura na ausência de armaduras transversais eficazes .....	73
Figura 27 – Modo de ruptura na presença de armaduras transversais eficazes .....	74
Figura 28 – Modo de ruptura por deficiência das ancoragens .....	74
Figura 29 – Viga na iminência da ruptura e os tipos de fissura que podem ocorrer..	76
Figura 30 – Assimilação entre a viga de concreto e a treliça .....	78
Figura 31 – Dados de entrada da viga no Excel.....	87
Figura 32 – Dados de saída da viga (resultado) no Excel .....	88
Figura 33 – Fluxograma do algoritmo de programação para armadura longitudinal .	94
Figura 34 – Fluxograma do algoritmo de programação para armadura transversal..	95
Figura 35 – Dados de Saída da viga 3 .....	97
Figura 36 – Dados de Saída da viga 6 .....	97
Figura 37 – Tela inicial do Scilab.....	98
Figura 38 – Página do sciNotes em destaque o botão salvar e executar.....	99
Figura 39 – Erro do $f_{ck}$ .....	100
Figura 40 – Erro do diâmetro do estribo.....	100
Figura 41 – Erro do domínio.....	101
Figura 42 – Erro da base.....	101
Figura 43 – Erro do cobrimento.....	101
Figura 44 – Erro do domínio.....	102
Figura 45 – Erro da taxa de armadura .....	102
Figura 46 – Erro do domínio.....	102
Figura 47 – Esmagamento da biela.....	103
Figura 48 – Erro do espaçamento entre estribos .....	103

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Classes de carregamento.....	35
Tabela 2 – Classes de agressividade ambiental (CAA) .....	41
Tabela 3 – Correspondência entre a classe de agressividade ambiental e o cobrimento nominal .....	42
Tabela 4 – Valores dos coeficientes $\gamma_c$ e $\gamma_s$ .....	60
Tabela 5 – Dados de entrada dos exemplos estudados .....	89
Tabela 6 – Dados de saída dos exemplos estudados.....	96
Tabela 7 – Dados de saída dos exemplos estudados (continuação) .....	96

## LISTA DE EQUAÇÕES

Equação 1 – Vão efetivo .....	55
Equação 2 – Arredondamento de momento fletor.....	55
Equação 3 – Arredondamento de momento fletor.....	55
Equação 4 – Arredondamento de momento fletor.....	55
Equação 5 – Arredondamento de momento fletor.....	55
Equação 6 – Cálculo do pré-dimensionamento de viga em tramos internos.....	59
Equação 7 – Cálculo do pré-dimensionamento de viga em tramos externos ou biapoiadas.....	59
Equação 8 – Cálculo do pré-dimensionamento de viga em balanço.....	59
Equação 9 – Resistência de cálculo do concreto .....	60
Equação 10 – Resistência de cálculo ao escoamento do aço.....	60
Equação 11 – Esforços de cálculo .....	61
Equação 12 – Parâmetro para a ductilidade na para concretos com $f_{ck} \leq 50$ MPa ...	61
Equação 13 – Parâmetro para a ductilidade na para concretos com $f_{ck} > 50$ MPa ...	62
Equação 14 – Equilíbrio das forças atuantes normais à seção transversal .....	62
Equação 15 – Equilíbrio dos momentos fletores .....	62
Equação 16 – Momento fletor de cálculo .....	62
Equação 17 – Cálculo das tensões de compressão do concreto .....	63
Equação 18 – Cálculo do braço de alavanca .....	63
Equação 19 – Cálculo do parâmetro de definição da profundidade do retângulo de tensões $\sigma_c$ .....	63
Equação 20 – Tensão à compressão no concreto .....	63
Equação 21 – Momento fletor de cálculo .....	63
Equação 22 – Momento fletor de cálculo simplificada.....	63
Equação 23 – Profundidade da linha neutra .....	63
Equação 24 – Cálculo da área da seção transversal da armadura longitudinal tracionada.....	63

Equação 25 – Cálculo da área da seção transversal da armadura longitudinal tracionada.....	64
Equação 26 – Semelhança de triângulos do diagrama de deformações .....	64
Equação 27 – Posição da linha neutra com a deformação específica do concreto...65	
Equação 28 – Cálculo do máximo momento resistente da seção .....	65
Equação 29 – Momento resistido pela armadura comprimida.....	65
Equação 30 – Cálculo da área da seção transversal da armadura longitudinal tracionada, referente ao $M_{lim}$ .....	66
Equação 31 – Cálculo da área da seção transversal da armadura tracionada total..	66
Equação 32 – Cálculo da área da seção transversal da armadura longitudinal comprimida.....	66
Equação 33 – Deformação específica da armadura comprimida .....	66
Equação 34 – Taxa de armadura mínima geral .....	67
Equação 35 – Taxa de armadura mínima para $f_{ck} \leq 50$ MPa.....	67
Equação 36 – Taxa de armadura mínima para $f_{ck} > 50$ MPa .....	67
Equação 37 – Área de aço longitudinal mínima .....	67
Equação 38 – Área de aço longitudinal máxima .....	67
Equação 39 – Verificação da força cortante de cálculo referente às diagonais comprimidas.....	79
Equação 40 – Verificação da força cortante de cálculo referente às diagonais tracionadas.....	79
Equação 41 – Verificação das tensões de compressão nas bielas.....	79
Equação 42 – Tensão solicitante de cálculo .....	80
Equação 43 – Tensão resistente de cálculo relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto .....	80
Equação 44 – Parâmetro de definição da tensão $\sigma_c$ , considerada constante ao longo de $y$ .....	80
Equação 45 – Parcela da tensão resistida pela armadura transversal.....	80
Equação 46 – Parcela da tensão resistida pela armadura transversal.....	80

Equação 47 – Parcela da tensão absorvida por mecanismos complementares ao de treliça.....	80
Equação 48 – Resistência de cálculo à tração do concreto .....	80
Equação 49 – Taxa geométrica de armadura transversal.....	81
Equação 50 – Taxa geométrica de armadura transversal mínima .....	81
Equação 51 – Resistência média do concreto à tração .....	81
Equação 52 – Parcela de força cortante resistida pela armadura transversal .....	81
Equação 53 – Parcela da tensão resistida pela armadura transversal.....	81
Equação 54 – Cálculo do espaçamento entre estribos .....	81
Equação 55 – Cálculo do espaçamento entre estribos de dois ramos.....	81
Equação 56 – Área nominal da seção transversal de um ramo do estribo .....	81
Equação 57 – Espaçamento máximo dos estribos, para $V_d \leq 0,67 V_{Rd2}$ .....	82
Equação 58 – Espaçamento máximo dos estribos, para $V_d > 0,67 V_{Rd2}$ .....	82
Equação 59 – Distância máxima entre ramos dos estribos, para $V_d \leq 0,20.V_{Rd2}$ .....	82
Equação 60 – Distância máxima entre ramos dos estribos, para $V_d > 0,20.V_{Rd2}$ .....	82

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

a.C. – Antes de Cristo

ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas

ago – Agosto

CACSD – Desenho de Sistemas de Controle auxiliado por Computador

CG – Centro de gravidade

DSc. – Doutor

ELS – Estado limite de serviço

ELU – Estado limite último

et al. – Entre outros

etc. – Etcetera

INRIA – Instituto Nacional Francês para Pesquisa em ciência da computação e Controle

IRIA – Instituto Francês para Pesquisa em computação e Controle

MSc. – Mestre

NBR – Norma Brasileira Regulamentadora

out – Outubro

set – Setembro

TCC – Trabalho de conclusão de curso

## LISTA DE SÍMBOLOS

m – Metros

C – Classe do concreto

kg – Quilograma

m<sup>3</sup> – Metros cúbicos

% – Porcentagem

f<sub>yk</sub> – Resistência ao escoamento do aço característica

CA – Especificação do aço

‰ – Permilagem

γ – Peso específico

kN – Quilonewton

F – Força

R – Reação de apoio

A<sub>S</sub> – Área da seção transversal da armadura longitudinal tracionada

A'<sub>S</sub> – Área da seção transversal da armadura longitudinal comprimida

mm – Milímetros

b<sub>w</sub> – Largura da seção transversal de vigas de seção retangular

d' – Distância da fibra de concreto mais comprimida até o centro de gravidade da armadura comprimida (h-d)

N – Esforço normal

V – Esforço cortante

σ<sub>c</sub> – Tensão à compressão no concreto

f<sub>tk</sub> – Resistência característica do concreto à tração

∞ – Infinito

ε<sub>c2</sub> – Deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico



$\epsilon_{cu}$  – Deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura

$h$  – Altura total da seção transversal de uma peça

$x$  – Profundidade da linha neutra

$\epsilon_s$  – Deformação específica do aço à tração

$\epsilon_c$  – Deformação específica do concreto

$d$  – Altura útil da viga: distancia da fibra de concreto mais comprimida até o centro de gravidade da armadura tracionada

$f_{ck}$  – Resistência à compressão do concreto característica

MPa – Megapascal

$\epsilon_{yd}$  – Deformação específica de escoamento do aço

$f_{yd}$  – Resistência ao escoamento do aço de cálculo

$y$  – Altura da linha neutra convencional

$\sigma_s$  – Tensão à tração na armadura

$\sigma'_s$  – Tensão à compressão na armadura

$l_0$  – Distância entre faces de dois apoios consecutivos

$l_{ef}$  – Vão efetivo da viga

$l$  – Vão da viga

$a_1$  – Distância além da face de apoio de viga (distância à esquerda)

$a_2$  – Distância além da face de apoio de viga (distância à direita)

$t_1$  – Largura de a apoio paralelo ao vão de viga (largura à esquerda)

$t_2$  – Largura de a apoio paralelo ao vão de viga (largura à direita)

$\Delta$  – Percentual que indica variação de área (de armadura ou de concreto)

cm – Centímetros

$h_{est}$  – Altura estimada da viga (pré-dimensionamento)

$f_{cd}$  – Resistência à compressão do concreto de cálculo

$\gamma_c$  – Coeficiente de ponderação da resistência do concreto

$\gamma_s$  – Coeficiente de ponderação da resistência do aço

$F_d$  – Esforço de cálculo

$F_k$  – Esforço característico

$\gamma_f$  – Coeficiente de majoração de esforços característicos

$P$  – Valor da carga de ruptura

$M$  – Momento fletor

$F_c$  – Força de compressão do concreto

$F_s$  – Força atuante na armadura

$M_d$  – Momento fletor de cálculo

$M_k$  – Momento fletor característico

$\lambda$  – Parâmetro de definição da profundidade do retângulo de tensões  $\sigma_c$

$\epsilon_{lim}$  – Deformação limite do aço

$\alpha$  – Ângulo de inclinação da armadura transversal em relação ao eixo longitudinal da peça

$Z$  – Braço da alavanca

$\alpha_c$  – Parâmetro de definição da tensão  $\sigma_c$ , considerada constante ao longo de  $y$

$f_s$  – Tensão atuante no aço

$M_{lim}$  – Momento obtido impondo que a seção trabalhe no limite da ductilidade

$M_2$  – Momento que será resistido por uma armadura comprimida ( $A'_s$ )

$Z_{lim}$  – Braço da alavanca limite para atender a condição de ductilidade  $x/d=0,45$  para concretos até classe C50 e  $x/d=0,35$  para concretos com classe maiores que C50

$A_{s2}$  – Área da seção transversal da armadura longitudinal tracionada, referente ao  $M_2$

$A_{s1}$  – Área da seção transversal da armadura longitudinal tracionada, referente ao  $M_{lim}$

$f'_s$  – Tensão na armadura comprimida

$\epsilon'_s$  – Deformação específica da armadura comprimida

$x_{lim}$  – Linha neutra limite para atender a condição de ductilidade  $x/d=0,45$  para concretos até classe C50 e  $x/d=0,35$  para concretos com classe maiores que C50

$f_{ctm}$  – Resistência média do concreto à tração

$\rho_{\min}$  – Taxa de armadura longitudinal mínima

$\ln$  – Logaritmo Neperiano

$A_{s,\min}$  – Área mínima da seção transversal da armadura longitudinal tracionada

$A_c$  – Área da seção transversal

$\rho$  – Taxa de armadura

$A_{s,\max}$  – Área máxima da seção transversal da armadura longitudinal tracionada

$\epsilon_y$  – Deformação de escoamento da armadura tracionada

$f_y$  – Tensão de escoamento do aço tracionado

$\theta$  – Ângulo de inclinação das bielas comprimidas em relação ao eixo longitudinal da peça

$V_c$  – Parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça

$V_{Sd}$  – Esforço cortante solicitante de cálculo

$V_{Rd2}$  – Força cortante resistente de cálculo relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto

$V_{Rd3}$  – Força cortante resistente de cálculo relativa à ruína por tração diagonal

$V_{sw}$  – Parcela de força cortante resistida pela armadura transversal

$\tau_{Sd}$  – Tensão solicitante de cálculo

$\tau_{Rd2}$  – Tensão resistente de cálculo relativa à ruína das diagonais comprimidas de concreto

$\alpha_{v2}$  – Força cortante resistente de cálculo relativa à ruína das diagonais comprimidas no modelo I

$\tau_{SW}$  – Parcela da tensão resistida pela armadura transversal

$\tau_{Rd3}$  – Tensão resistente de cálculo relativa à ruína por tração diagonal

$\tau_c$  – Parcela da tensão absorvida por mecanismos complementares ao de treliça

$f_{ctd}$  – Resistência de cálculo à tração do concreto

$\rho_{sw,90}$  – Taxa geométrica de armadura transversal inclinadas a 90°

$f_{ywd}$  – Resistência ao escoamento da armadura transversal, valor de cálculo

$\rho_{sw,90 \text{ min}}$  – Taxa geométrica de armadura transversal mínima inclinadas a  $90^\circ$

$f_{yk}$  – Valor característico da resistência ao escoamento do aço da armadura transversal

$A_{sw}$  – Área nominal da seção transversal de um ramo do estribo

$s$  – Espaçamento entre estribos, medido segundo o eixo longitudinal da peça

$\emptyset_e$  – Diâmetro do estribo

$s_{max}$  – Espaçamento máximo entre estribos, medido segundo o eixo longitudinal da peça

$s_{t,max}$  – Distância máxima entre ramos dos estribos

$\text{cm}^2$  – Centímetros quadrados

$c$  – Cobrimento do concreto

$V_k$  – Esforço cortante característico

$K_x$  – Parâmetro para o domínio de deformação na seção transversal

## SUMÁRIO

<b>1 INTRODUÇÃO</b> .....	23
1.1 OBJETIVO .....	24
1.1.1 Objetivo geral .....	24
1.1.2 Objetivos específicos .....	24
1.2 JUSTIFICATIVA .....	24
<b>2 REFERENCIAL TEÓRICO</b> .....	25
2.1 FUNDAMENTAÇÕES GERAIS .....	25
2.1.1 Breve histórico .....	25
2.1.2 Definições .....	27
2.1.3 Vantagens e desvantagens do concreto armado .....	29
2.1.4 Vigas .....	30
2.1.5 Ações .....	33
2.1.6 Esforços internos em vigas com cargas transversais .....	37
2.1.7 Elementos estruturais de uma viga .....	38
2.1.8 Agressividade do ambiente .....	40
2.2 VIGAS SUBMETIDAS À FLEXÃO SIMPLES .....	42
2.2.1 Tipos de flexão .....	42
2.2.2 Processo de colapso de vigas submetidas a tensões normais .....	44
2.2.3 Domínios de deformação na seção transversal .....	46
2.2.4 Análise estrutural .....	50
2.2.5 Hipóteses básicas .....	53
2.2.6 Estruturas de elementos lineares .....	54
2.2.7 Vão efetivo .....	55
2.2.8 Arredondamento do diagrama de momentos fletores .....	55
2.2.9 Dimensões da viga .....	56
2.2.10 Pré-dimensionamento .....	58

2.2.11 Valores de cálculo .....	59
2.2.12 Dimensionamento da armadura longitudinal em vigas retangulares submetidas à flexão normal .....	61
2.2.13 Equacionamento para armadura longitudinal.....	62
2.3 VIGAS SUBMETIDAS À FORÇA CORTANTE .....	67
2.3.1 Fatores que influenciam a resistência à força cortante .....	68
2.3.2 Comportamento resistente de vigas sem armadura transversal .....	69
2.3.3 Comportamento resistente de vigas com armadura transversal .....	70
2.3.4 Modos de ruptura de vigas submetidas a forças cortantes.....	72
2.3.5 Analogia da treliça de Mörsch.....	75
2.3.6 Dimensionamento da armadura transversal .....	78
2.3.7 Equacionamento para armadura transversal (modelo de cálculo I).....	79
2.3.8 Exigências normativas para o cálculo de armaduras transversais .....	82
2.4 AUTOMATIZAÇÃO COMPUTACIONAL.....	82
2.4.1 Considerações iniciais .....	82
2.4.2 Algoritmo e linguagem de programação .....	83
2.4.3 Etapas da criação de um algoritmo.....	84
2.4.4 História do Scilab .....	84
2.4.5 Software Scilab .....	85
3 METODOLOGIA.....	87
3.1 UNIVERSO DA PESQUISA.....	87
3.2 COLETA E ANÁLISE DE DADOS .....	88
3.3 ROTEIRO DE CÁLCULO PARA O DIMENSIONAMENTO DE VIGAS RETANGULARES.....	89
3.3.1 Dimensionamento de vigas com armadura simples.....	91
3.3.2 Dimensionamento de vigas com armadura dupla .....	91
3.3.3 Dimensionamento da armadura transversal .....	92
3.4 LÓGICA UTILIZADA NA PROGRAMAÇÃO .....	93

<b>4 RESULTADOS E DISCUSSÃO</b> .....	96
4.1 DADOS DE SAÍDA .....	96
4.2 ROTEIRO PARA UTILIZAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO NO SCILAB .....	98
4.3 ERROS DE SEGURANÇA.....	100
<b>5 CONCLUSÃO</b> .....	104
<b>REFERÊNCIAS</b> .....	105
<b>GLOSSÁRIO</b> .....	112
<b>APÊNDICE A – CODIGO DE PROGRAMAÇÃO DO SCILAB</b> .....	113
<b>APÊNDICE B – DIMENSIONAMENTO MANUAL DE VIGAS RETANGULARES DE CONCRETO ARMADO</b> .....	120

## 1 INTRODUÇÃO

No Brasil, o sistema estrutural de concreto armado é o mais empregado na construção civil, isso se deve a sua facilidade em ser moldado em qualquer formato, quando respeitadas às normas técnicas, e possuir alta durabilidade. A maioria das edificações construídas nas áreas urbanas brasileiras é baseada nesse sistema, tanto as construções formais e legalizadas, quanto as informais. Estas estruturas de concreto armado têm como principal componente o cimento, que é um dos materiais mais consumidos no país.

Por ser um sistema muito empregado, há uma grande preocupação em relação à economia, seja ela no consumo de materiais, no custo de mão de obra e na diminuição do desperdício. A busca dessa economia provocou o aumento em pesquisas relacionadas a estruturas de concreto armado. Assim, oferecendo maior economia e segurança, reduzido assim, o custo final da obra.

No passado, os engenheiros elaboraram cálculos complexos e extensos de forma analítica e trabalhosa. Com a utilização de ferramentas computacionais que auxilia na análise e no dimensionamento de estruturas, isso mudou e trouxe uma melhora na precisão e na qualidade dos cálculos, proporcionando ao engenheiro mais tempo para a análise dos resultados, o que possibilita obter estruturas com um melhor planejamento e concepção estrutural.

A TQS Informática Ltda foi uma das pioneiras na automatização no processo de dimensionamento de estruturas, possibilitando transpor o cálculo manual para os computadores. Fundada em 1986, a TQS começou seus trabalhos de automatização no Brasil com o CAD/Viga para o dimensionamento e detalhamento de vigas. Em 1998 ela avançou, e lançou no mercado o CAD/Pilar voltado para o cálculo de pilares e o CAD/Laje para o cálculo de lajes. No ano 2000, esta empresa lança o CAD/TQS para Windows que engloba todos os elementos estruturais.

Com a proposta de auxiliar o processo de automatização do dimensionamento de estruturas, surge como ferramenta fundamental, a programação, que possibilita maior rapidez em obter as soluções de problemas relacionados aos cálculos de estruturas de modo cada vez mais preciso. Um dos softwares que vem se tornando destaque na engenharia é o Scilab, por ser uma poderosa ferramenta computacional gratuita e possuir um ambiente de programação interativo. O qual permite a criação de programas numéricos, através de uma linguagem de programação própria.



## 1.1 OBJETIVO

Nesta seção são apresentados os objetivos deste trabalho, a fim de um melhor entendimento do mesmo.

### 1.1.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho consiste em desenvolver uma programação que seja capaz de dimensionar vigas retangulares de concreto armado submetidas às solicitações de flexão simples e força cortante. Atendendo aos requisitos da NBR 6118:2014 – Projeto de estruturas de concreto, em seu Estado-Limite Último (ELU) para que seja garantida a segurança e durabilidade estrutural.

### 1.1.2 Objetivos específicos

Elaborar um fluxograma para o dimensionamento de vigas de seção transversal retangular de concreto armado. Desenvolver um código computacional na linguagem do software Scilab que permita compreender os domínios determinados em norma para cada solicitação, visando a durabilidade e a segurança estrutural em seções retangulares. Criar roteiros de dimensionamentos validados por meio de comparações com o cálculo de forma analítica.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

Essa programação poderá ser utilizada como uma ferramenta profissional gratuita, em que o engenheiro será capaz de dimensionar, checar as armaduras “in loco” e fazer possíveis alterações na estrutura. Isto, aliado a um software para cálculo de esforços internos poderá realizar a etapa de dimensionamento de vigas de forma rápida, simples e segura. Além disso, Pode ser utilizado para fins acadêmicos, auxiliando professores de concreto I e seus alunos a verificar seus cálculos, tornando o aprendizado mais simples e dinâmico.

## **2 REFERENCIAL TEÓRICO**

Neste capítulo foi feita uma ampla revisão bibliográfica, contemplado como seções as fundamentações gerais, vigas submetidas à flexão simples, vigas submetidas à força cortante e automação computacional, além do equacionamento utilizado para o desenvolvimento dos cálculos.

### **2.1 FUNDAMENTAÇÕES GERAIS**

Nesta seção são apresentados um breve histórico do concreto armado e algumas definições importantes para o desenvolvimento deste trabalho.

#### **2.1.1 Breve histórico**

Desde 2000 anos antes de Cristo, a argamassa de cal já era utilizada na ilha de Creta, e no terceiro século a.C., os romanos descobriram uma fina areia vulcânica que, misturada com argamassa de cal, resultava numa argamassa muito resistente e possível de ser aplicada sob a água (MACGREGOR, 1997). Os romanos também faziam uso de uma pozolana de origem vulcânica, e misturada à areia, pedra e água, confeccionavam concretos que foram aplicados em construções que perduram até os dias de hoje, como o Panteão, construído durante o primeiro século da era Cristã (McCORMAC e NELSON, 2006).

Considera-se que a descoberta do concreto armado foi do agricultor francês Joseph-Louis Lambot, que em 1849 realizou a construção de um barco, o primeiro objeto do material registrado pela História. O barco foi construído com telas de fios finos de ferro, preenchidas com argamassa de cimento, como pode ser visto na Figura 1. Lambot testou o barco em sua propriedade agrícola e realizou sua patente em 1855, o mesmo ano em que foi apresentado na Feira Mundial de Paris (o protótipo original é preservado no Museu de Brignoles, França). (KAEFER, 1998).

Figura 1 — Foto real do barco de Joseph-Louis Lambot.



Fonte: Goretti, 2013.

Em 1850 o francês Joseph Mounier, um paisagista, fabricou tubos reforçados com ferro, vasos de flores com argamassa de cimento e armadura de arame, e depois reservatórios, escadas e uma ponte com vão de 16,5 m. Foi o início do que hoje se conhece como “concreto armado” (BASTOS, 2014).

De acordo com Kaefer (1998), em 1886, o engenheiro alemão Gustav Adolf Wayss (1851-1917) comprou as patentes de Mounier para desenvolvê-las. Ele conduziu suas pesquisas para o uso do concreto armado como material de construção em sua empresa, a Wayss & Freytag.

O desenvolvimento do concreto armado no Brasil iniciou em 1901 no Rio de Janeiro, com a construção de galerias de água, e em 1904 com a construção de casas e sobrados. Em 1908 foi construída uma primeira ponte com 9 m de vão. Em São Paulo, em 1910 foi construída uma ponte com 28 m de comprimento. O primeiro edifício em São Paulo data de 1907, sendo um dos mais antigos do Brasil em “cimento armado”, com três pavimentos. A partir de 1924 quase todos os cálculos estruturais passaram a ser feitos no Brasil, com destaque para o engenheiro estrutural Emílio Baumgart (VASCONCELOS<sup>1</sup>, 1985 apud BASTOS, 2014).

---

<sup>1</sup> VASCONCELOS, A.C. **O concreto no Brasil – Recordes**, Realizações, História. São Paulo, Ed. Pini, 2ª ed., v.1,1985. 277p.

### 2.1.2 Definições

#### *a) Concreto*

Segundo Bastos (2014), o concreto é um material composto, constituído por cimento, água, agregado miúdo (areia) e agregado graúdo (pedra ou brita), que também pode conter adições como metacaulim e a sílica ativa e aditivos químicos como plastificantes, retardadores de pega, com a finalidade de melhorar ou modificar suas propriedades básicas. O concreto é obtido por um cuidadoso proporcionamento dos materiais, que define a quantidade de cada um dos diferentes materiais, a fim de proporcionar ao concreto diversas características desejadas, tanto no estado fresco quanto no estado endurecido.

O concreto é o material mais utilizado no mundo depois da água. E é o material mais utilizado em construções de edifícios, pontes ou grandes estruturas, isso deve-se a sua durabilidade, resistência e facilidade em se obter diferentes formas (VIRGOLINO e PELLEGRINO NETO, 2015). O concreto, como as pedras naturais, apresenta alta resistência à compressão, o que faz dele um excelente material para ser empregado em elementos estruturais primariamente submetidos à compressão, como os pilares. Por outro lado, suas características de fragilidade e baixa resistência à tração restringem seu uso isolado em elementos submetidos totalmente ou parcialmente à tração, como tirantes, vigas, lajes e outros elementos fletidos (NILSON et al., 2010).

De acordo com a NBR 6118:2014 (item 8.2) a classe C20, ou superior, se aplica ao concreto com armadura passiva (concreto armado) e a classe C25, ou superior, ao concreto com armadura ativa (concreto protendido) e classe C15 pode ser usada apenas em obras provisórias ou concreto sem fins estruturais, sendo que a classe pode chegar até C90 atendendo a NBR 8953:2015 - Concreto para fins estruturais - Classificação por grupos de resistência. Ainda segundo a NBR 6118:2014 (item 8.2.2), se a massa específica real não for conhecida, para efeito de cálculo, pode-se adotar para o concreto simples o valor de 2400 kg/m<sup>3</sup>.

#### *b) Aço*

O aço é uma liga de ferro-carbono com outros elementos adicionais (silício, manganês, fósforo, enxofre etc.), resultante da eliminação total ou parcial de elementos inconvenientes que se fazem presentes no produto obtido na primeira

redução do minério de ferro. O teor de carbono nessa liga varia de 0 a 1,7% (PINHEIRO et al., 2010).

Ainda segundo os mesmos autores, os aços estruturais para construção civil possuem teores de carbono da ordem de 0,18% a 0,25%. Esse material tem grande aplicação na engenharia graças às seguintes características: ductilidade; incombustibilidade; facilidade de ser trabalhado; resistência à tração, compressão, flexão e torção; resistência a impacto, abrasão e desgaste. Em condições adequadas, apresenta também resistência a variações de temperatura, intempéries e agressões químicas.

Conforme Carvalho e Figueiredo Filho (2015) a resistência característica do escoamento do aço à tração ( $f_{yk}$ ) é a máxima tensão que a barra ou o fio devem suportar, pois, a partir dela o aço passa a sofrer deformações permanentes, ou seja, até este valor de tensão. Se interromper o ensaio de tração de uma amostra, esta voltará ao seu tamanho inicial, não apresentando nenhum tipo de deformação permanente; este é o caso dos aços que apresentam patamar de escoamento definido (CA-25 e CA-50). O aço CA-60 não tem patamar definido, e o valor de ( $f_{yk}$ ) é o da tensão correspondente a uma deformação específica permanente de 0,002 (0,2% ou 2‰).

### *c) Concreto armado*

Segundo Weber (2014), o concreto armado é um material de construção resultante da união do concreto simples e de barras de aço, envolvidas pelo concreto, com perfeita aderência entre os dois materiais, de tal maneira que resistam ambos solidariamente aos esforços a que forem submetidos.

Uma estrutura não pode ser formada apenas de concreto, pois o concreto simples apresenta pequena resistência à tração e funciona de maneira frágil e para contornar a limitação do concreto. Assim, o aço é empregado em conjunto com o concreto e convenientemente posicionado na peça de modo a resistir à tração (VIRGOLINO e PELLEGRINO NETO, 2015). Tal armadura é chamada de passiva, o que significa que as tensões e deformações nela existentes devem-se exclusivamente às ações externas aplicadas na peça. O trabalho conjunto do concreto e do aço é possível porque os coeficientes de dilatação térmica dos dois materiais são praticamente iguais (BASTOS, 2014). Segundo a NBR 6118:2014 (item 8.2.2), a massa específica do concreto armado é 2500 kg/m<sup>3</sup>.

Ainda segundo o mesmo autor, este trabalho conjunto entre o concreto e a armadura fica bem caracterizado na comparação de uma viga sem armadura e com armadura. Supondo que as forças aplicadas sobre as vigas aumentem gradativamente de zero até a ruptura, a viga sem armadura rompe bruscamente tão logo inicia-se a primeira fissura, o que ocorre quando a tensão de tração atuante alcança a resistência do concreto à tração.

### **2.1.3 Vantagens e desvantagens do concreto armado**

Como todo material que se utiliza para determinada finalidade, o concreto armado apresenta vantagens e desvantagens quanto ao seu uso estrutural (CARVALHO e FIGUEIREDO FILHO, 2015).

#### *a) Vantagens*

- Apresenta boa resistência à maioria das solicitações;
- Tem boa trabalhabilidade, e por isso se adapta a várias formas, podendo, assim, ser escolhida a mais conveniente do ponto de vista estrutural, dando maior liberdade ao projetista;
- Permite obter estruturas monolíticas (sem juntas), o que não ocorre com as de aço, madeira e pré-moldadas. Existe aderência entre o concreto já endurecido e o que é lançado posteriormente, facilitando a transmissão de esforços;
- As técnicas de execução são razoavelmente dominadas em todo o país.
- Em diversas situações, pode competir com as estruturas de aço em termos econômico;
- É um material durável, desde que seja bem executado, conforme as normas, e evitando o uso de aceleradores de pega, cujos produtos químicos podem corroer as armaduras;
- Apresenta durabilidade e resistência ao fogo superiores em relação à madeira e ao aço, desde que os cobrimentos e a qualidade do concreto estejam de acordo com as condições do meio em que está inserida a estrutura;
- Possibilita a utilização da pré-moldagem, proporcionando maior rapidez e facilidade de execução;
- É resistente a choque e vibrações, efeitos térmicos, atmosférico e desgastes mecânicos.

#### *b) Desvantagens*

- Resulta em elementos com maiores dimensões que o aço, o que, com seu peso específico elevado ( $\gamma \approx 25 \text{ kN/m}^3$ ), acarreta em um peso próprio muito grande, limitando seu uso em determinadas situações ou elevando bastante seu custo;
- As reformas e adaptações são, muitas vezes, de difícil execução;
- É bom condutor de calor e som, exigindo, em casos específicos, associação com outros materiais para sanar esses problemas;
- São necessários um sistema de fôrmas e a utilização de escoramento (quando não se faz uso da pré-moldagem) que geralmente precisam permanecer no local até que o concreto alcance resistência adequada.

#### **2.1.4 Vigas**

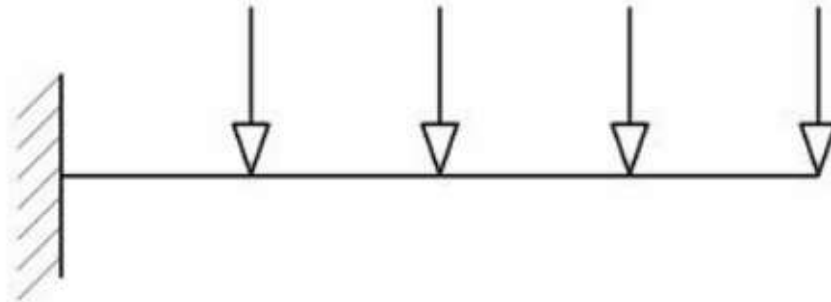
De acordo com a NBR 6118:2014 (item 14.4.1.1) vigas são “elementos lineares em que a flexão é preponderante”. Podem ser dispostas horizontalmente ou inclinadas, com um ou mais apoios (móvel ou fixo), engastes, etc, de tal forma a garantir que tais barras sejam no mínimo isostáticas. Segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2015), para combater a flexão e a força cortante é necessário calcular a armadura longitudinal e transversal da viga. O dimensionamento é feito no estado-limite de último, impondo que na seção mais solicitada sejam alcançadas as deformações específicas limites dos materiais. Em outras palavras, o estado-limite de último pode ocorrer tanto pela ruptura do concreto comprimido quando pela deformação excessiva da armadura tracionada.

O cálculo de viga consiste em dimensionar a altura e largura de sua seção transversal, avaliar a quantidade de aço necessária para a confecção das armaduras e detalhar as dimensões de cada barra de aço utilizada, baseando em parâmetros iniciais impostos pelas vinculações, números de vão, materiais utilizados, interação entre vãos, condições de estabilidade e, principalmente, pelo carregamento solicitante, tendo como finalidade garantir, com segurança adequada, que a estrutura mantenha certas características que possibilitem a utilização satisfatória da construção, durante sua vida útil, para a finalidade às quais foi concebida (BORGES, 2010; CARVALHO e FIGUEIREDO FILHO, 2015).

Segundo Souza e Rodrigues (2008), os principais tipos de vigas são:

- a) *Viga em balanço*: viga com apoio único que obrigatoriamente deve ser um engaste fixo, conforme a Figura 2;

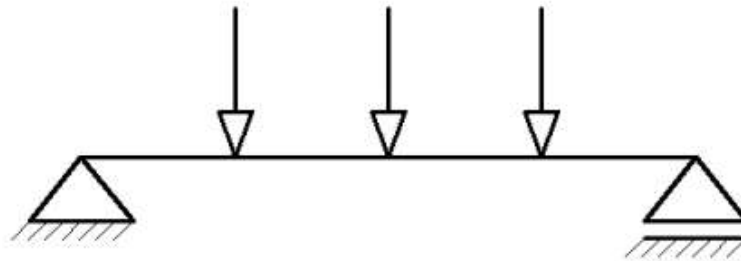
Figura 2 — Viga em balanço.



Fonte: Souza e Rodrigues, 2008.

- b) *Viga simplesmente apoiada*: viga com apoio fixo e um apoio móvel, conforme a Figura 3;

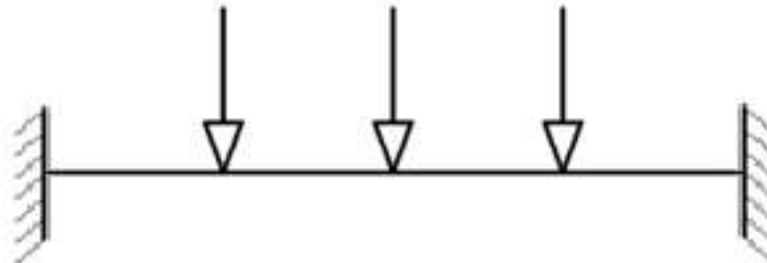
Figura 3 — Viga bi-apoiada.



Fonte: Souza e Rodrigues, 2008.

- c) *Viga biengastada*: viga com as duas extremidades engastadas, conforme a Figura 4;

Figura 4 — Viga biengastada.

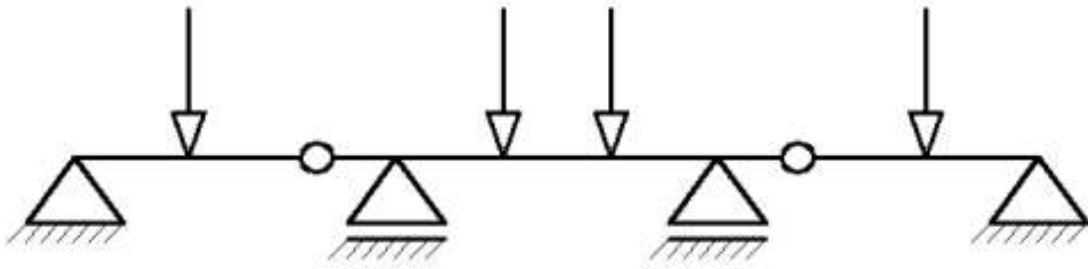


Fonte: Acervo do autor (2016).

- d) *Viga Gerber*: viga articulada e isostática, sobre mais de dois apoios, conforme a Figura 5;



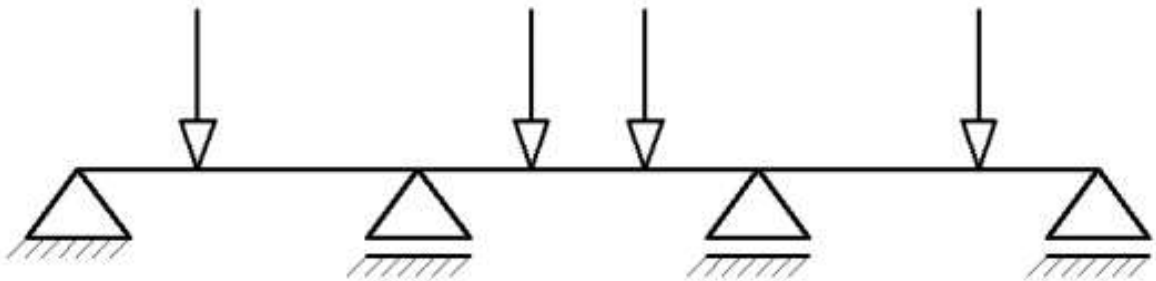
Figura 5 — Viga gerber.



Fonte: Souza e Rodrigues, 2008.

e) *Viga contínua*: viga hiperestática, sobre mais de dois apoios, conforme a Figura 6;

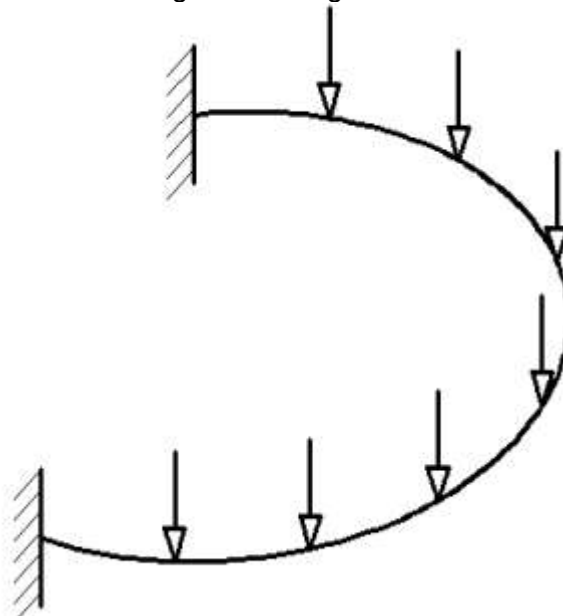
Figura 6 — Viga contínua.



Fonte: Souza e Rodrigues, 2008.

f) *Viga balcão*: viga de eixo curvo ou poligonal, com carregamento não pertencente ao plano formado pela viga, conforme a Figura 7;

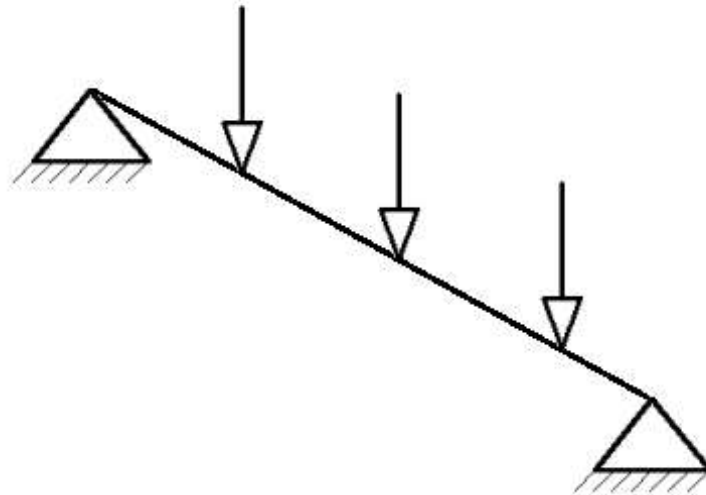
Figura 7 — Viga balcão.



Fonte: Souza e Rodrigues, 2008.

g) *Viga-coluna*: barra com solicitações de flexão e de compressão, conforme a Figura 8;

Figura 8 — Viga-coluna.



Fonte: Acervo do autor (2016).

### 2.1.5 Ações

Souza et al. (2008) relata que o aparecimento de esforços ou deformações nas estruturas são causados por meio de ações. Quando há aplicação de forças, diz-se que estas forças são ações diretas e quando há deformações impostas a uma estrutura e estas originam esforços na estrutura diz-se que estas deformações geram ações indiretas. Em relação ao tempo, as ações podem ser dos seguintes tipos:

- *Ações permanentes*: são aquelas que ocorrem com valores constantes ou de pequena variação em torno de um valor médio, durante toda a vida da construção, como por exemplo, o peso próprio da estrutura;
- *Ações variáveis*: são aquelas cujos valores variam significativamente durante toda a vida da construção como cargas acidentais (ex: vento);
- *Ações excepcionais*: são aquelas que têm duração extremamente curta e muito baixa probabilidade de ocorrência durante a vida da construção, entretanto, devendo ser consideradas no projeto de determinadas estruturas (ex: explosão).

*a) Combinações de ações*

Segundo a NBR 8681:2003 - Ações e segurança nas estruturas, um carregamento é definido pela combinação das ações que têm probabilidades não desprezáveis de atuarem simultaneamente sobre a estrutura, durante um período pré-estabelecido.

A NBR 15575:2013 Edificações habitacionais — Desempenho - Parte 2: Requisitos para os sistemas estruturais, afirma que para determinar os efeitos mais desfavoráveis para a estrutura é necessário fazer a combinação de ações, verificar o estado-limite último - ELU (paralisação do uso da construção por ruína, deformação plástica excessiva, instabilização ou transformação da estrutura, no todo ou em parte, em sistema hipostático) e do estado-limite de serviço – ELS (implica no comprometimento da utilização da obra por fissuração ou deformações excessivas, comprometimento da durabilidade da estrutura ou ocorrência de falhas localizadas que possam prejudicar os níveis de desempenho previstos para a estrutura), em função de combinações últimas e combinações de serviço, respectivamente.

*b) Classes de carregamento*

Fusco et al. (1996) relata que um carregamento é especificado pelo conjunto das ações que têm probabilidade não desprezível de atuação simultânea. Para determinar os efeitos mais desfavoráveis para a estrutura, cada tipo de carregamento deve ser combinado às ações de diferentes maneiras. A classe de carregamento de qualquer combinação de ações é definida pela duração acumulada prevista para a ação variável tomada como a ação variável principal na combinação considerada. As classes de carregamento estão especificadas na Tabela 1.

Tabela 1 — Classes de carregamento.

Classe de carregamento	Ação variável principal da combinação	
	Duração acumulada	Ordem de grandeza da duração acumulada da ação característica
Permanente	Permanente	Vida útil da construção
Longa duração	Longa duração	Mais de seis meses
Média duração	Média duração	Uma semana a seis meses
Curta duração	Curta duração	Menos de uma semana
Duração instantânea	Duração instantânea	Muito curta

Fonte: Fusco et al. (1996).

### c) Classificação dos carregamentos

#### *i) Carregamento normal*

Um carregamento é considerado normal quando inclui apenas ações decorrentes do uso previsto para a construção. Corresponde à classe de carregamento de longa duração, podendo ter duração igual ao período de referência (ou vida útil) da estrutura. No carregamento normal as eventuais ações de curta ou média duração terão seus valores atuantes reduzidos para que a resistência do material possa ser considerada como correspondente somente às ações de longa duração (SOUZA et al.,2008).

#### *ii) Carregamento especial*

Ainda de acordo com os mesmos autores, um carregamento é considerado especial quando inclui a atuação de ações variáveis de natureza especial, cujos efeitos superam em intensidade os efeitos produzidos pelas ações consideradas no carregamento normal. Corresponde à classe de carregamento definida pela duração acumulada prevista para a ação variável especial considerada (ex: um vento muito forte).

#### *iii) Carregamento excepcional*

A NBR 8681:2003 (4.3.2.3) relata que um carregamento é considerado excepcional quando inclui ações excepcionais que podem gerar efeitos catastróficos (ex: uma explosão).

#### *iv) Carregamento de construção*

Ainda de acordo com a mesma norma, um carregamento é considerado de construção quando é transitório e deve ser definido em cada caso particular em que haja risco de ocorrência de estados limites últimos já durante a construção. Corresponde à classe de carregamento definida pela duração acumulada da situação de risco (ex.: içamento de uma tesoura por um guindaste).

#### *d) Situações de projeto*

Toda estrutura deve ser projetada e construída de modo a satisfazer os requisitos básicos de segurança, permanecendo adequada ao uso previsto e suportando todas as ações e outras influências que podem agir durante a construção e durante a sua utilização (SZÜCS et al., 2015).

Para cada estrutura devem ser especificadas as situações de projeto a considerar. Szücs et al. (2005) define basicamente três situações de projeto a serem consideradas: situações duradouras, situações transitórias e situações excepcionais.

#### *i) Situações duradouras*

As situações duradouras são consideradas no projeto de qualquer estrutura e são aquelas que podem ter duração igual ao período de referência da estrutura. Para as situações duradouras, a verificação da segurança é efetuada em relação aos estados limites último e de utilização. Quanto ao estado-limite último consideram-se as combinações últimas normais de carregamento (ALMEIDA, P., 2007).

#### *ii) Situações transitórias*

Segundo o mesmo autor, as situações transitórias são aquelas que têm duração muito menor que o período de vida da construção. Apenas são consideradas em algumas estruturas em que estão sujeitas a algum carregamento especial, devendo está especificada no projeto. Em casos especiais, pode-se exigir a verificação da segurança em relação a estados limites de utilização, considerando apenas combinações de curta duração (raras) ou combinações de duração média (especiais).

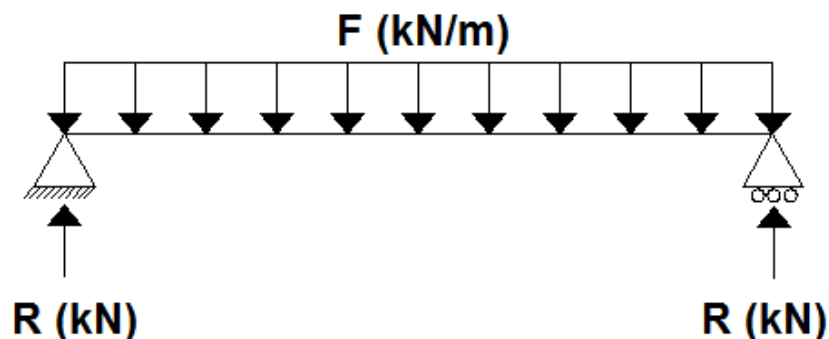
### iii) situações excepcionais

Segundo Szücs et al. (2015), as ações excepcionais são aquelas em que o período de vida da construção é extremamente curto. São considerados para a verificação da segurança os estados limites últimos. As situações excepcionais de projeto apenas devem ser consideradas quando a segurança em relação às ações excepcionais contempladas não puder ser garantida de outra forma, como o emprego de elementos físicos de proteção da construção, ou a modificação da concepção estrutural adotada. Caso haja necessidade, essas situações devem ser explicitamente especificadas para o projeto.

#### 2.1.6 Esforços internos em vigas com cargas transversais

As ações são as responsáveis pelo aparecimento de esforços e deformações nas estruturas. Considerando a Figura 9 como exemplo, quanto maior for a força  $F$  aplicada, maior será o valor das reações  $R$ , podendo causar algum dano a viga. Para que este dano ocorra é necessário que pontos do material sejam afetados. Pode-se concluir então que nestes pontos estão atuando esforços que solicitam a estrutura e esta não os suporta. De uma forma geral é possível dizer que quando uma estrutura está sob a ação de esforços externos em equilíbrio, nos seus pontos internos atuam esforços internos solicitantes. Os máximos valores que os esforços solicitantes podem ter sem que ocorra algum dano à estrutura são denominados esforços internos resistentes (MORILLA, 2010).

Figura 9 — Esforços externos em uma viga bi apoiada.



Fonte: Acervo do autor (2016).

#### *a) Força Cortante*

É a resultante de forças atuantes de um dos lados da seção na direção perpendicular ao eixo da estrutura (SÜSSEKIND, 1981). O efeito do esforço cortante provoca o deslizamento linear, no sentido do esforço, de uma seção sobre a outra infinitamente próxima, acarretando o corte ou cisalhamento da mesma (CHRISTOFORO e SIMIONI, 2014).

#### *b) Momento fletor*

Segundo Martha (2010), o momento fletor é a resultante momento de todas as forças e momentos de uma porção isolada sobre a outra porção na direção transversal ao eixo da barra na seção transversal de corte. Para Christoforo e Simioni (2014), o momento fletor tende a flexionar a peça, como resultado de tensões normais de sinais contrários na mesma seção, ou seja, tende a fazer a seção girar sobre um eixo localizado no seu próprio plano, comprimindo uma parte e distendendo a outra.

### **2.1.7 Elementos estruturais de uma viga**

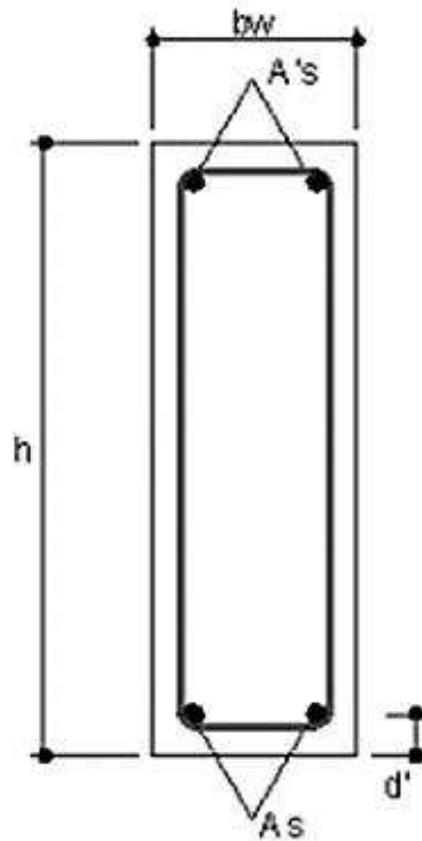
As vigas de concreto armado possuem alguns elementos estruturais como:

#### *a) Armadura longitudinal*

A armadura longitudinal é formada por barras de aço de eixo retilíneo e seção transversal circular. Estas barras são dispostas na região tracionada da viga no caso da chamada armadura simples, denominada ( $A_s$ ), e quando necessário na região tracionada e comprimida, denominada ( $A'_s$ ), no caso de armadura dupla, como pode ser observado na Figura 10 (BARBATO, 2007).

Ainda de acordo com o mesmo autor, quando se utiliza armadura simples, as barras devem absorver todos os esforços (tensões) de tração gerados pelo momento aplicado. Caso seja empregada armadura dupla, parte das barras absorve os esforços de tração produzidos pelo momento e parte colabora com o concreto aumentando a resistência da região comprimida da viga, caso não haja a necessidade será utilizada barras de sustentação ou também chamada de armaduras construtivas.

Figura 10 — Demonstração da armadura de tração ( $A_s$ ) e de compressão ( $A'_s$ ) em uma viga.



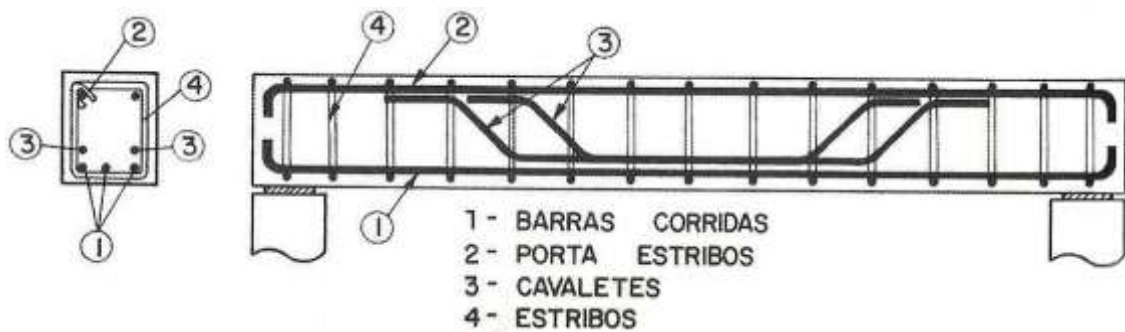
Fonte: Mattos, 2010.

#### *b) Armadura transversal*

A armadura transversal ou de cisalhamento pode ser constituída por estribos ou barras longitudinais curvadas, conforme a Figura 11. Essas barras curvadas, também conhecidas como cavaletes, eram comuns até os anos 1970 e não são mais usadas atualmente, principalmente por razões construtivas. As armaduras transversais tem a função de resistir aos esforços de tração decorrente do cisalhamento e impedir a ruptura por fendilhamento, por causar uma compressão transversal favorável a essa amarração. Atualmente o estribo é a armadura transversal mais usada, sendo necessário o uso de ancoragem no banzo comprimido da viga, também chamados de porta estribos (PINHEIRO et al., 2010; CORREIA, 2012).



Figura 11 — Tipos básicos de armaduras de viga.



Fonte: Fusco, 2008.

### 2.1.8 Agressividade do ambiente

Conforme a NBR 6118:2014 (item 6.4.1), a agressividade do meio ambiente está relacionada às ações físicas e químicas que atuam sobre as estruturas de concreto. Independem das ações mecânicas, das variações volumétricas de origem térmica, da retração hidráulica e outras previstas no dimensionamento das estruturas.

A norma ainda salienta que nos projetos das estruturas atuais, a agressividade ambiental deve ser classificada de acordo com o apresentado na Tabela 2 e deve ser avaliada pelo responsável do projeto estrutural, segundo as condições de exposição da estrutura ou de suas partes.

Tabela 2 — Classes de agressividade ambiental (CAA).

Classe de agressividade ambiental	Agressividade	Classificação geral do tipo de ambiente para efeito de projeto	Risco de deterioração da estrutura
	I	Fraca	Rural Submersa
II	Moderada	Urbana <sup>a, b</sup>	Pequeno
III	Forte	Marinha <sup>a</sup> Industrial <sup>a, b</sup>	Grande
IV	Muito forte	Industrial <sup>a, c</sup> Respingos de maré	Elevado

<sup>a</sup> Pode-se admitir um microclima com uma classe de agressividade mais branda (uma classe acima) para ambientes internos secos (salas, dormitórios, banheiros, cozinhas e áreas de serviço de apartamentos residenciais e conjuntos comerciais ou ambientes com concreto revestido com argamassa e pintura).

<sup>b</sup> Pode-se admitir uma classe de agressividade mais branda (uma classe acima) em obras em regiões de clima seco, com umidade média relativa do ar menor ou igual a 65 %, partes da estrutura protegidas de chuva em ambientes predominantemente secos ou regiões onde raramente chove.

<sup>c</sup> Ambientes quimicamente agressivos, tanques industriais, galvanoplastia, branqueamento em indústrias de celulose e papel, armazéns de fertilizantes, indústrias químicas.

Fonte: NBR 6118:2014.

Para cada classe de agressividade, a norma recomenda o uso de um cobrimento mínimo de acordo com a Tabela 3, com uma tolerância máxima de 5,0 mm.

Tabela 3 — Correspondência entre a classe de agressividade ambiental e o cobrimento nominal.

Tipo de estrutura	Componente ou elemento	Classe de agressividade ambiental (Tabela 6.1)			
		I	II	III	IV <sup>c</sup>
		Cobrimento nominal mm			
Concreto armado	Laje <sup>b</sup>	20	25	35	45
	Viga/pilar	25	30	40	50
	Elementos estruturais em contato com o solo <sup>d</sup>	30		40	50
Concreto protendido <sup>a</sup>	Laje	25	30	40	50
	Viga/pilar	30	35	45	55

<sup>a</sup> Cobrimento nominal da bainha ou dos fios, cabos e cordoalhas. O cobrimento da armadura passiva deve respeitar os cobrimentos para concreto armado.

<sup>b</sup> Para a face superior de lajes e vigas que serão revestidas com argamassa de contrapiso, com revestimentos finais secos tipo carpete e madeira, com argamassa de revestimento e acabamento, como pisos de elevado desempenho, pisos cerâmicos, pisos asfálticos e outros, as exigências desta Tabela podem ser substituídas pelas de 7.4.7.5, respeitado um cobrimento nominal  $\geq 15$  mm.

<sup>c</sup> Nas superfícies expostas a ambientes agressivos, como reservatórios, estações de tratamento de água e esgoto, condutos de esgoto, canaletas de efluentes e outras obras em ambientes química e intensamente agressivos, devem ser atendidos os cobrimentos da classe de agressividade IV.

<sup>d</sup> No trecho dos pilares em contato com o solo junto aos elementos de fundação, a armadura deve ter cobrimento nominal  $\geq 45$  mm.

Fonte: NBR 6118:2014.

## 2.2 VIGAS SUBMETIDAS À FLEXÃO SIMPLES

Esta seção foi dedicada a vigas submetidas à flexão simples, em que foi feita uma ampla explicação sobre o tema e ao final obteve-se o equacionamento para armaduras simples e duplas.

### 2.2.1 Tipos de flexão

Carvalho e Figueiredo Filho (2015) afirma que o momento fletor provoca flexão nos elementos estruturais, e nas seções transversais desses elementos surgem tensões normais (perpendiculares à seção). Existem diversos tipos de flexão, nas quais é preciso identificar cada um deles para que seja possível calcular esses elementos. Apresenta-se, a seguir o conceito de cada um dos tipos:

*a) Flexão normal (simples ou composta)*

Ocorre quando o plano do carregamento ou da sua resultante é perpendicular à linha neutra ou, em outras palavras, quando o plano contém um dos eixos principais da inércia da seção; nesse caso, em seções simétricas (um eixo de simetria é sempre um eixo principal de inércia), o momento fletor atua no plano de simetria.

*b) Flexão oblíqua (simples ou composta)*

Ocorre quando o plano de carregamento não é normal à linha neutra; ou se o momento fletor tiver uma componente normal ao plano de simetria; ou, ainda, quando a seção não é simétrica pela forma ou por suas armaduras.

*c) Flexão simples*

Ocorre quando não há esforço normal agindo na seção ( $N=0$ ); a flexão simples pode ser normal ou oblíqua.

*d) Flexão composta*

Ocorre quando há esforço normal (de tração ou de compressão) agindo na seção ( $N \neq 0$ ), com ou sem esforço cortante.

*e) Flexão pura*

Refere-se a um caso particular de flexão (simples ou composta), em que não há esforço cortante atuante ( $V=0$ ); nas regiões da viga em que isso ocorre, o momento fletor é constante.

*f) Flexão não pura*

Ocorre quando há esforço cortante agindo na seção.

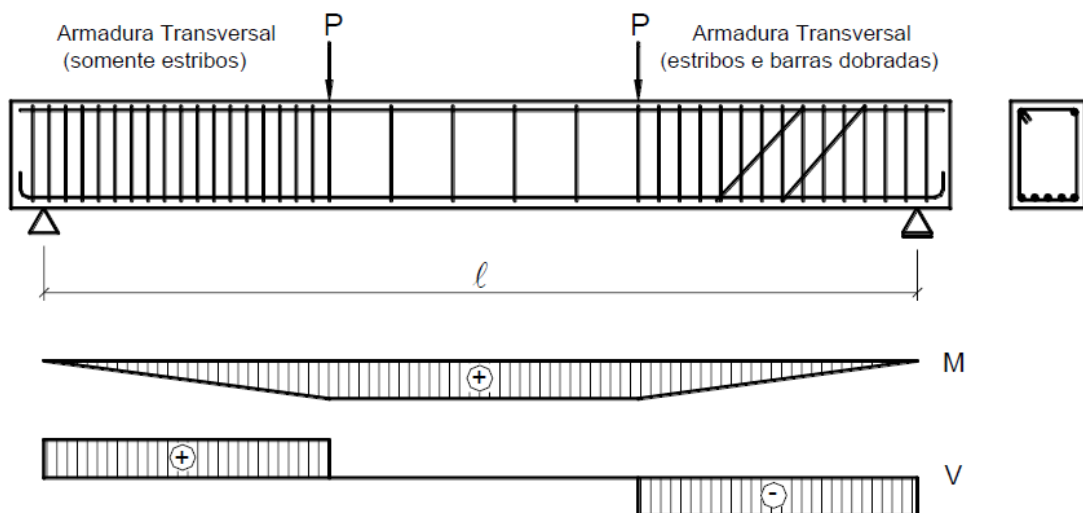
Conforme Carvalho e Figueiredo Filho (2015), geralmente o esforço normal é desprezível em vigas, logo, serão consideradas inicialmente apenas as flexões normal, simples e pura, em que  $N=0$  e  $V=0$ . Normalmente, valoriza-se muito o cálculo da quantidade de armadura longitudinal (de flexão) necessária e, por ser um procedimento apenas numérico, sua aplicação está bastante desenvolvida; entretanto, é preciso chamar a atenção para o fato de que o entendimento dos principais mecanismos de colapso (ruína) é fundamental para um detalhamento da

armadura que permita uma boa execução, um bom funcionamento e, conseqüentemente, uma maior durabilidade da estrutura.

### 2.2.2 Processo de colapso de vigas submetidas a tensões normais

De acordo com Teixeira P. (2011), considere-se uma viga simplesmente apoiada sujeita a duas forças concentradas aplicadas nos terços de vão (Figura 12). admite-se ainda que o peso-próprio da viga é pequeno frente às duas forças e será desprezado para análise. A região central da viga está submetida à flexão pura, ou seja, não há variação de momento fletor entre as duas forças aplicadas, pois se desprezou o peso próprio. Já nas duas regiões extremas apresentam variação de momentos fletores e, portanto esforços cortantes. A viga é provida de armaduras longitudinais e transversais (estribos).

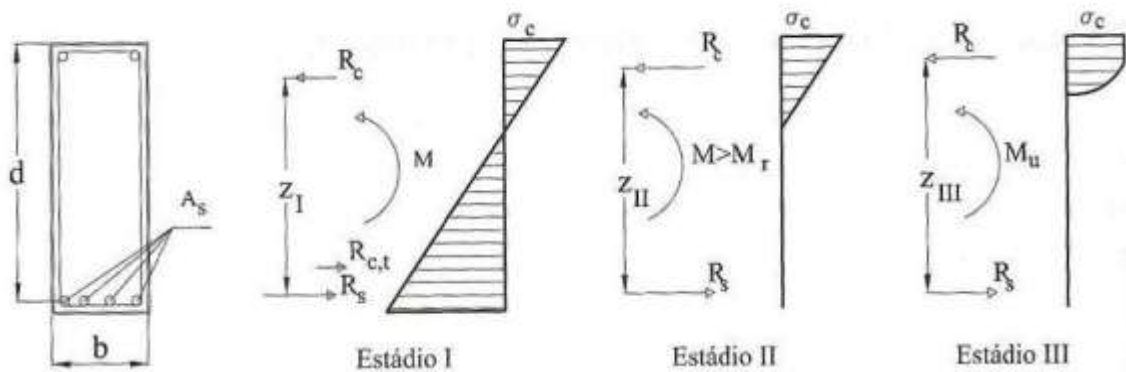
Figura 12 — Viga biapoiada e diagramas de esforços solicitantes.



Fonte: Leonhardt e Mönning (1982).

A seção transversal central da viga de concreto armado, retangular neste caso (Figura 13), sujeita a um momento fletor ( $M$ ) crescente, passa por três níveis de deformação, denominados estádios, os quais determinam o comportamento da peça até sua ruína. Na figura a seguir estão representadas as deformações e tensões no aço e no concreto, assim como as resultantes dessas tensões (CARVALHO e FIGUEIREDO FILHO, 2015).

Figura 13 — Comportamento da seção transversal de uma viga de concreto armado na flexão normal simples.



Fonte: Carvalho e Figueiredo Filho, 2015.

Podem-se caracterizar os três estádios de deformação de uma viga de concreto na flexão normal simples:

*a) Estádio I (estado elástico)*

No estágio I a tensão de tração no concreto não ultrapassa sua resistência característica à tração ( $f_{tk}$ ), e não havendo fissuras visíveis; nesse estágio o diagrama de tensão normal ao longo da seção é linear, e as tensões nas fibras mais comprimidas são proporcionais às deformações, equivalendo ao trecho linear do diagrama tensão de formação do concreto (CUNHA, 2011).

*b) Estádio II (estado de fissuração)*

Na chegada do estágio II puro, a resistência à tração passa a ser governada apenas pela armadura e o concreto situado nessas regiões é desprezado; nesse estágio a tensão de tração na maioria dos pontos situados na região tracionada da seção tem valor superior ao da resistência característica do concreto à tração ( $f_{tk}$ ) e as fissuras são visíveis (HOFMANN e SILVA, 2012).

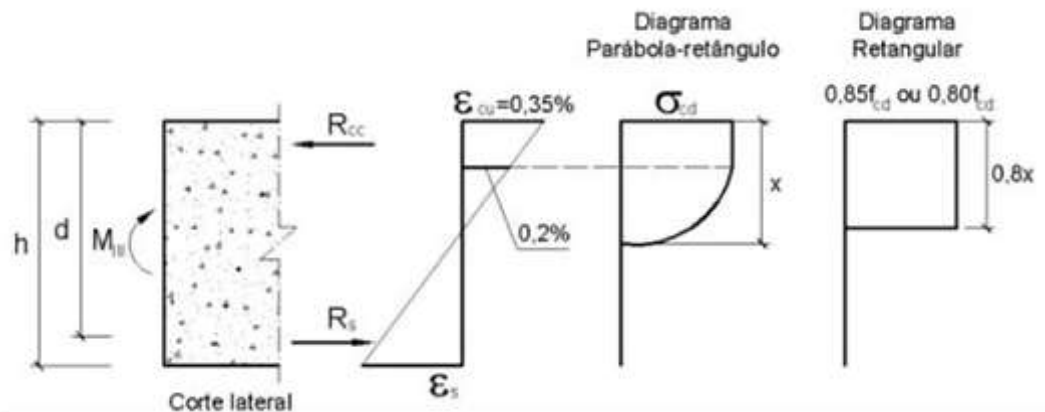
*c) Estádio III (estado de fissuração)*

Segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2015), aumenta-se o momento fletor até um valor próximo ao de ruína ( $M$ ). A fibra mais comprimida do concreto começa a escoar a partir da deformação específica de 2,0‰, chegando a atingir, sem aumento de tensão, 3,5‰. O Diagrama de tensões tende a ficar vertical

(uniforme), com quase todas as fibras trabalhando com sua tensão máxima, ou seja, praticamente todas as fibras atingem deformações superiores a 2,0‰.

A zona comprimida encontra-se plastificada e o concreto dessa região está na iminência da ruptura. Admite-se que o diagrama de tensões seja da forma parabólico-retangular, também conhecido como diagrama parábola-retângulo, ilustrado na Figura 14. Além disso, o dimensionamento de estruturas de concreto armado é feito no estado-limite de último (estádio III), pois o objetivo principal é projetar estruturas que resistam, de forma econômica, aos esforços sem chegar ao colapso (CARVALHO e FIGUEIREDO FILHO, 2015; PINHEIRO et al., 2003).

Figura 14 — Diagrama de tensões no concreto no estado-limite último.



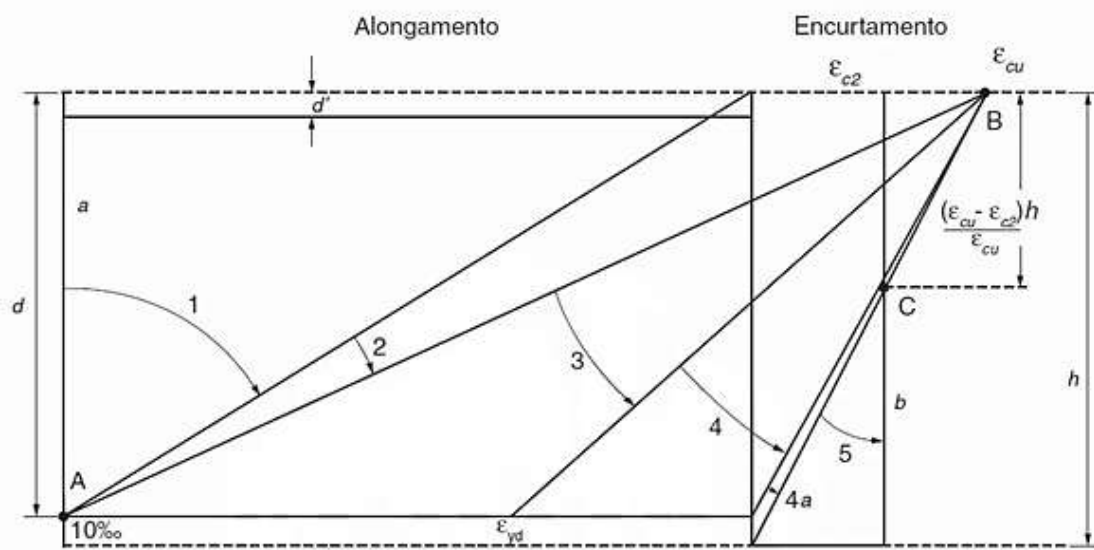
Fonte: Pinheiro et al., 2003.

### 2.2.3 Domínios de deformação na seção transversal

Almeida L. (2002) afirma que os arranjos possíveis do diagrama de deformações correspondentes ao estado-limite último para uma seção submetida a solicitações normais propõe a delimitação de regiões, chamadas domínios de deformações, onde poderá estar contido o diagrama de deformações referente a um determinado caso de solicitação normal quando o estado-limite último for atingido.

A Figura 15 mostra o diagrama de deformação da seção transversal pouco antes de sua ruptura. Nela são mencionados os casos de solicitação possíveis para cada um dos domínios de deformação, variando-se a posição da linha neutra de  $-\infty$  a  $+\infty$ , ou seja, das solicitações de tração uniforme à compressão uniforme (CÉZAR JÚNIOR e SILVA, 2010).

Figura 15 — Domínios de estado-limite último de uma seção transversal.



Fonte: NBR 6118:2014.

a) *Reta a*

Conforme Fernandes (2006) a reta a refere-se à tração uniforme, caso em que toda a seção é tracionada de modo uniforme. A deformação na seção é representada por uma reta paralela à face da seção, que é a origem das deformações. A posição da linha neutra é dada por  $x = -\infty$ . O estado-limite último é atingido por deformação plástica excessiva da armadura sendo caracterizado por um alongamento de 1%. Por isso, a reta a, que representa as deformações no estado-limite último para o caso da tração uniforme, passa pelo ponto A, que corresponde a um alongamento de 1% na armadura. A seção resistente é constituída somente pelas armaduras, pois o concreto tracionado é considerado fissurado.

b) *Domínio 1*

No domínio 1 ocorre tração não uniforme e de pequenas excentricidades, com a ausência de compressão. O início do domínio é caracterizado pelo alongamento máximo do aço nas duas bordas, assim  $\varepsilon_S = 10,0\%$  e  $\varepsilon_C = 10,0\%$ . A posição da linha neutra é dada por  $x = -\infty$  e no final do domínio é dado por:  $\varepsilon_S = 10,0\%$  e  $\varepsilon_C = 0,0\%$ , e a posição da linha neutra variando em  $x > -\infty$  até  $x \leq 0$  (fora da seção). A principal consideração para efeito de dimensionamento neste domínio é a contabilização dos esforços resistentes apenas nas armaduras, desprezando-se a resistência à tração do concreto (MELO, 2015).



### c) Domínio 2

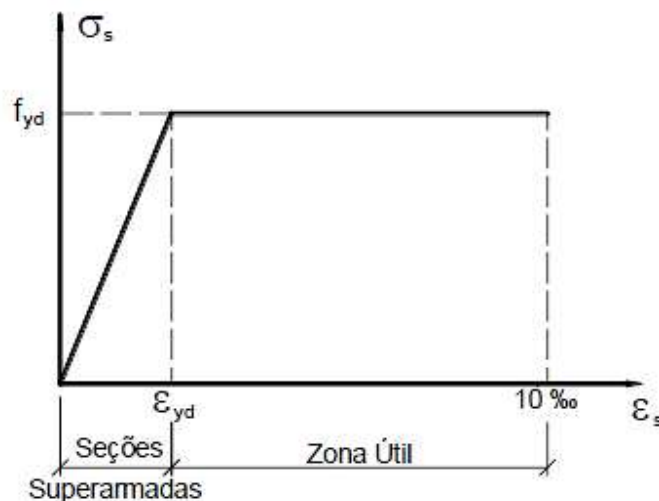
Segundo Fusco (1981), o estado-limite de último é caracterizado pela deformação  $\varepsilon_s = 10,0\text{‰}$ . A linha neutra corta a seção transversal e cobre o campo de profundidade desde  $x > 0$  até  $x \leq 0,259d$ , havendo na peça um banzo tracionado, mas o concreto da zona comprimida não atinge a ruptura, pois esta somente poderá acontecer na posição limite do fim do domínio 2, quando então  $\varepsilon_c = 3,5\text{‰}$ .

### d) Domínio 3

No domínio 3 a deformação de encurtamento na fibra mais comprimida corresponde ao valor último ( $\varepsilon_c$ ), de  $3,5\text{‰}$  para os concretos do grupo I de resistência ( $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ ). A deformação de alongamento na armadura tracionada varia entre  $\varepsilon_{yd}$  (deformação de início de escoamento do aço) e  $10 \text{ ‰}$ , o que significa que a armadura escoar certo valor. Verifica-se na Figura 16 que a tensão na armadura é a máxima permitida, igual à  $f_{yd}$ , pois qualquer que seja a deformação entre  $\varepsilon_{yd}$  e  $10 \text{ ‰}$  (zona útil), a tensão será  $f_{yd}$ . Isso resulta, assim como no domínio 2, a armadura também é econômica no domínio 3 (BASTOS, 2015).

Ainda segundo o mesmo autor, neste domínio, tanto o concreto comprimido quanto o aço tracionado são aproveitados ao máximo, diferentemente do domínio 2, onde o concreto tem deformações de encurtamento menores que a máxima ( $\varepsilon_c$ ). A ruptura no domínio 3 é também chamada com “*aviso prévio*”, pois a armadura, ao escoar, acarretará fissuras visíveis na viga, antes que o concreto alcance a ruptura por esmagamento;

Figura 16 — Zonas de dimensionamento em função da deformação no aço.



Fonte: Bastos, 2015.

*e) Domínio 4*

É caracterizada pela flexão simples ou composta com ruptura à compressão do concreto ( $\epsilon_C = 3,5\%$ ) e sem escoamento do aço ( $\epsilon_S < \epsilon_{yd}$ ). A linha neutra corta a seção. A ruptura da peça ocorre de forma frágil sem aviso, pois o concreto rompe antes que a armadura tracionada se deforme excessivamente, característica de seções superarmadas. Utiliza-se ao máximo a resistência do concreto e desprezando-se as propriedades resistentes do aço, perdendo-se assim a deformação da estrutura. Procura-se evitar o dimensionamento neste domínio (CARVALHO, C., 2012; CLÍMACO, 2008).

*f) Domínio 4a*

Pinheiro et al. (2003) afirma que no domínio as duas armaduras são comprimidas e a ruína ainda ocorre com  $\epsilon_C = 3,5\%$  na borda comprimida. Como as duas armaduras são comprimidas, existe apenas uma pequena região de concreto tracionada próxima a uma das bordas da seção, e portanto essa armadura é muito mal aproveitada. A linha neutra encontra-se entre  $d$  e  $h$ . Esta situação só é possível na flexo-compressão.

*g) Domínio 5*

O domínio 5 refere-se à compressão não uniforme, tendo toda a seção de concreto comprimida. A linha neutra não corta a seção e estende o campo de profundidade da linha neutra desde  $x > h$  até  $x \leq +\infty$ . A reta do diagrama de deformações na seção passa pelo ponto C, afastado da borda mais comprimida de  $\frac{(\epsilon_{cu} - \epsilon_{c2})h}{\epsilon_{cu}}$  da altura total da seção e correspondente a um encurtamento de 2,0%. O estado-limite último é atingido pela ruptura do concreto comprimido com encurtamento na borda mais comprimida situado entre 3,5% e 2,0%, dependendo da posição da linha neutra, mas constante e igual a 2,0% na fibra que passa pelo ponto C (ALMEIDA L., 2002).

*h) Reta b*

Segundo Fernandes (2006), a reta b refere-se à compressão uniforme, caso em que toda a seção é comprimida de modo uniforme. A deformação na seção é representada por uma reta paralela à face da seção, que é a origem das

deformações. A posição da linha neutra ainda fica fora da seção e é dada por  $x = +\infty$ . O estado-limite último é atingido por ruptura do concreto com um encurtamento de 0,20%. Por isso, a reta b que representa as deformações no estado-limite último para o caso da compressão uniforme, passa pelo ponto C, que corresponde a um encurtamento de 2,0‰. A seção resistente é constituída pelo concreto e pelas armaduras, sendo a deformação nestas iguais à do concreto.

#### **2.2.4 Análise estrutural**

A análise estrutural é a fase do projeto estrutural em que é feita a idealização do comportamento da estrutura. Esse comportamento pode ser expresso por diversos parâmetros, tais como pelos campos de tensões, deformações e deslocamentos na estrutura (MARTHA, 2010). De acordo com a NBR 6118:2014 (item 14.2.1) o objetivo da análise estrutural é determinar os efeitos das ações em uma estrutura, com a finalidade de efetuar verificações dos estados limites últimos e de serviço. A análise estrutural permite estabelecer as distribuições de esforços internos, tensões, deformações e deslocamentos, em uma parte ou em toda a estrutura.

Sendo assim a NBR 6118:2014 (item 14.2.2) relata que a análise estrutural deve ser feita a partir de um modelo estrutural adequado ao objetivo da análise. Em um projeto faz-se necessário mais de um modelo para realizar as verificações previstas nesta norma. O modelo pode ser idealizado como a composição de elementos estruturais básicos formando sistemas estruturais resistentes que permitam representar de maneira clara todos os caminhos percorridos pelas ações até os apoios das estruturas. O modelo deve caracterizar a geometria dos elementos estruturais, os carregamentos atuantes, as condições de contorno, as características e respostas dos materiais, sempre em função do objetivo específico da análise.

Para a situação de projeto, a análise estrutural pode ser elaborada por um dos métodos apresentados abaixo, que se diferenciam pelo comportamento admitido para os materiais constituintes da estrutura, não perdendo de vista em cada caso as limitações correspondentes (KIRST, 2010). Esses métodos admitem que os deslocamentos da estrutura sejam pequenos.

### *a) Análise linear*

A elasticidade de um material está relacionada à sua disposição de voltar à sua forma inicial após ter sido submetido a deformações devido a ações externas, seguido de um alívio de carregamento. Na análise linear considera-se que haja uma constante proporcionalidade na relação entre tensões e deformações, ou seja, que os materiais tenham um comportamento elástico-linear, existindo para cada constante de proporcionalidade um valor característico (SANTOS JÚNIOR, 2016).

Fusco<sup>2</sup> (1976 apud FONTES, 2005) afirma que uma estrutura de comportamento linear é aquela em que os efeitos são obtidos como uma combinação linear e homogênea das causas e que esta estrutura precisa ser formada por um material perfeitamente elástico, tendo que possuir uma geometria que permita que ela seja analisada com uma teoria de primeira ordem. Isso resulta em dizer que as rotações dos elementos da estrutura podem ser desprezadas em relação à configuração inicial da estrutura, procedendo-se, desta forma, a análise estrutural com base na configuração indeformada da estrutura.

De acordo com Maciel et al. (2011), este método é geralmente usado para a verificação do estado-limite de serviço, entretanto é possível utilizá-lo para a análise do estado-limite último desde que se possa assegurar a ductilidade dos elementos estruturais.

### *b) Análise linear com redistribuição*

A análise linear com redistribuição consiste em reduzir nas seções críticas os efeitos nas seções para as combinações de carregamento do estado-limite último (DUARTE, 1998). Uma vez efetuada a análise linear de uma estrutura, pode-se considerar uma redistribuição dos esforços calculados, decorrente da variação de rigidez dos elementos estruturais. A fissuração, seguida da entrada no estágio II de determinadas seções transversais, provoca uma mudança dos esforços solicitantes, para regiões de maior rigidez (FONTES e PINHEIRO, 2009).

Em termos práticos, a análise linear com redistribuição, por meio de um método simplificado, provoca a redução de momentos fletores nos apoios de vigas

---

<sup>2</sup>FUSCO, P.B. **Estruturas de concreto: fundamentos do projeto estrutural**. v.1. São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 1976.

contínuas, e o respectivo aumento dos momentos fletores nos vãos, sem ter a necessidade de uma análise plástica mais precisa. Dessa forma é possível obter economia de armadura, já que os valores de momentos negativos e positivos passam a ser mais próximos (FONTES, 2005).

Os efeitos da redistribuição devem ser considerados em todos os aspectos do projeto estrutural, inclusive as condições de ancoragem, corte das armaduras e as forças a ancorar. Devem-se tomar cuidados especiais com relação aos carregamentos de grande variabilidade (NBR 6118:2014).

#### *c) Análise plástica*

A propriedade do material de guardar deformações residuais é chamada de plasticidade. As principais teorias envolvidas em projetos, que permitem que elementos estruturais sofram certas deformações permanentes, são a teoria das rótulas plásticas, para elementos lineares, e a teoria das charneiras plásticas, para elementos de superfície que trabalhem como placas (FONTES e PINHEIRO, 2005).

Este tipo de análise deve ser usada apenas para as verificações de estados limites últimos, e essa verificação deve ocorrer através da análise plástica da estrutura, devendo ser adotadas rótulas plásticas localizadas nas seções críticas. Portanto, na análise plástica deve-se calcular a rotação plástica necessária para a estrutura alcançar a redistribuição (RÊGO, 2005).

De acordo com a NBR 6118, a análise plástica de estruturas reticuladas não pode ser adotada quando:

- i) se consideram os efeitos de segunda ordem global;
- ii) não houver ductilidade suficiente para que as configurações adotadas sejam atingidas.

No caso de carregamento cíclico com possibilidade de fadiga, deve-se evitar o cálculo plástico.

#### *d) Análise não linear*

Reis (2013) afirma que em estruturas de concreto armado é necessário se levar em conta a não linearidade física e/ou geométrica na análise, pois sabe-se que o material constituinte não possui comportamento elástico perfeito e que em edifícios altos surgirão ações advindas do deslocamento horizontal da estrutura.

Este tipo de análise, também chamada análise de segunda ordem, é recomendado sempre que os deslocamentos tiverem efeito significativo sobre os esforços internos, sendo necessário que o equilíbrio da estrutura seja feito com base em sua geometria deslocada (NARDIN e SOUZA, 2008). Embora este procedimento seja matematicamente mais complexo, mostra-se mais realista do que a análise linear geométrica, na qual o equilíbrio é feito na configuração inicial (PASCON e CODA, 2009).

Segundo a NBR 6118:2014, na análise não linear, as condições de equilíbrio, de compatibilidade e de ductilidade devem ser obrigatoriamente satisfeitas. Podem ser adotadas tanto para verificações de estados limites últimos como para verificações de estados limites de serviço.

#### *e) Análise por meio de elementos físicos*

Para obter o comportamento estrutural por meio de modelos físicos só é possível a partir de ensaios realizados com modelos físicos de concreto, levando em conta os critérios de semelhança mecânica (CARVALHO e FIGUEIREDO FILHO, 2002).

A metodologia utilizada nos ensaios deve assegurar a possibilidade de obter a correta interpretação dos resultados. Neste caso, a interpretação dos resultados deve ser justificada por modelo teórico do equilíbrio nas seções críticas e análise estatística dos resultados (SANTINE, 2005).

Segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2002), obrigatoriamente devem ser obtidos resultados para todos os estados limites últimos e de serviço a serem usados na análise da estrutura. Para um ensaio mais preciso e completo, se faz necessário reproduzir todas as ações, condições e possíveis influências que possam ocorrer durante a vida da estrutura. Este tipo de análise é apropriado quando os modelos de cálculo são insuficientes ou estejam fora do propósito da NBR 6118:2014. As limitações físicas, práticas e de tempo poderão ser superadas via modelos teóricos pertinentes e previstos nas normas vigentes.

### **2.2.5 Hipóteses básicas**

#### *a) Condições de equilíbrio*

Almeida J. (2015) afirma que as condições de equilíbrio podem ser determinadas baseadas na geometria indeformada da estrutura, ou seja, teoria de 1ª

ordem. A não ser em casos que se levam em consideração a deformação da estrutura, devido às cargas solicitantes (teoria de 2ª ordem).

*b) Condições de compatibilidade*

Caso as condições de compatibilidade não forem verificadas no estado-limite considerado, devem-se adotar medidas que sejam suficientes para assegurar uma ductilidade adequada, satisfazendo os elementos estruturais aos estados limites último (PEREIRA, 2009).

*c) Carregamento monotônico*

A NBR 6118:2014 (item 14.3.3) admite carregamento monotônico até o estado-limite considerado, nas estruturas usuais, desde que a resposta a ciclos de carga e descarga, em serviço, não solicite o concreto a tensões de compressão acima de  $0,5 f_{ck}$ .

## **2.2.6 Estruturas de elementos lineares**

A NBR 6118:2014 (item 14.6) determina as estruturas ou partes de estruturas que possam ser relacionadas a elementos lineares (vigas, pilares, tirantes, arcos, pórticos, grelhas, treliças). A principal característica dos elementos lineares é possuir uma de suas dimensões bem maior que as demais. Essa condição pode ser considerada satisfeita, por exemplo, quando o comprimento longitudinal é igual ou maior que o triplo da maior dimensão da seção transversal do elemento (FONTES, 2005).

Algumas hipóteses básicas também devem ser adotadas:

- a) Manutenção da seção plana: as seções transversais da peça, quando fletidas não perdem a configuração plana (MARINS et al., 2001);
- b) O elemento linear pode ser representado por seu eixo longitudinal (JACOB, 2016);
- c) Ainda segundo o mesmo autor, geralmente seu comprimento é limitado pelo centro de seus apoios ou por interseção com o eixo longitudinal de algum outro elemento.

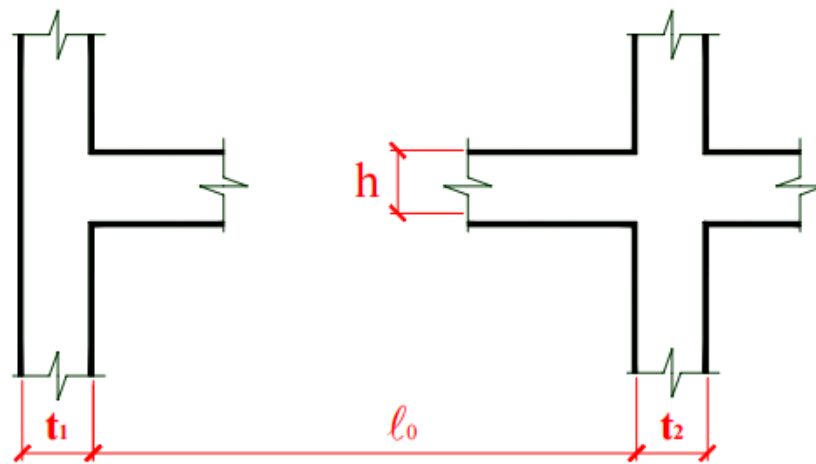
### 2.2.7 Vão efetivo

Segundo a NBR 6118:2014 (item 14.6.2.4), o vão livre ( $l_0$ ) é a distância entre as faces dos apoios (Figura 17). O vão efetivo ( $l_{ef}$ ), também conhecido como vão teórico ( $l$ ), pode ser calculado por:

$$l = l_0 + a_1 + a_2 \quad (1)$$

Com  $a_1$  igual ao menor valor ente ( $t_1/2$  e  $0,3h$ ) e  $a_2$  igual ao menor valor ente ( $t_2/2$  e  $0,3h$ ).

Figura 17 — Vão efetivo.



Fonte: Scadelai, 2004.

Contudo, é comum adotar o vão teórico como sendo, simplesmente, a distância entre os eixos dos apoios. Nas vigas em balanço, o vão livre é a distância entre a extremidade livre e a face externa do apoio, e o vão teórico é a distância até o centro do apoio (PINHEIRO et al., 2003).

### 2.2.8 Arredondamento do diagrama de momentos fletores

O diagrama de momentos fletores pode ser arredondado sobre os apoios, sob os pontos de aplicação de forças consideradas como concentradas e nos nós de pórticos (NBR 6118:2014) item 14.6.3. Esse arredondamento pode ser feito de maneira aproximada conforme indicado na Figura 18.

$$\Delta M = \frac{R_2 - R_1}{4} t \quad (2)$$

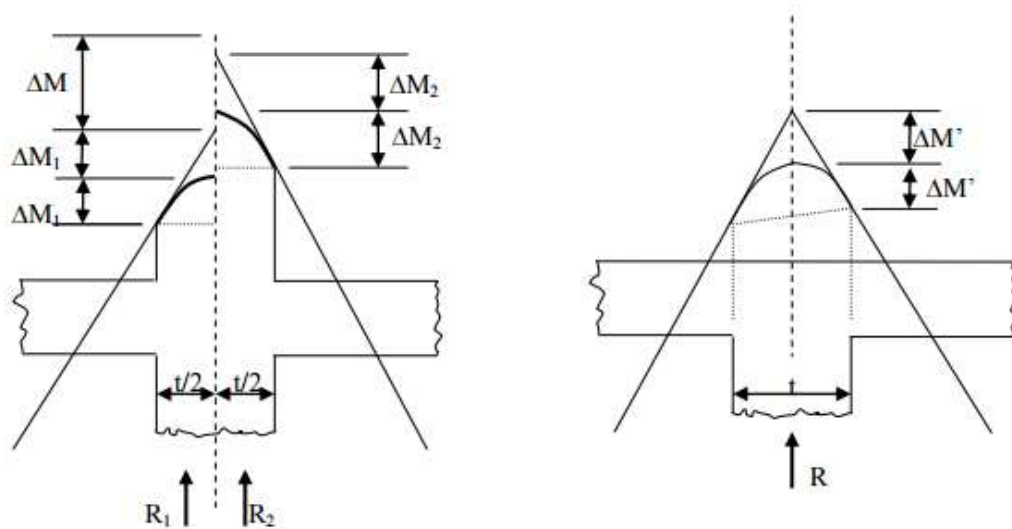
$$\Delta M_1 = \frac{R_1}{4} t \quad (3)$$

$$\Delta M_2 = \frac{R_2}{4} t \quad (4)$$

$$\Delta M' = \frac{R}{8} t \quad (5)$$



Figura 18 — Arredondamento do diagrama de momento fletor.



Fonte: Mesquita Filho, 2005.

### 2.2.9 Dimensões da viga

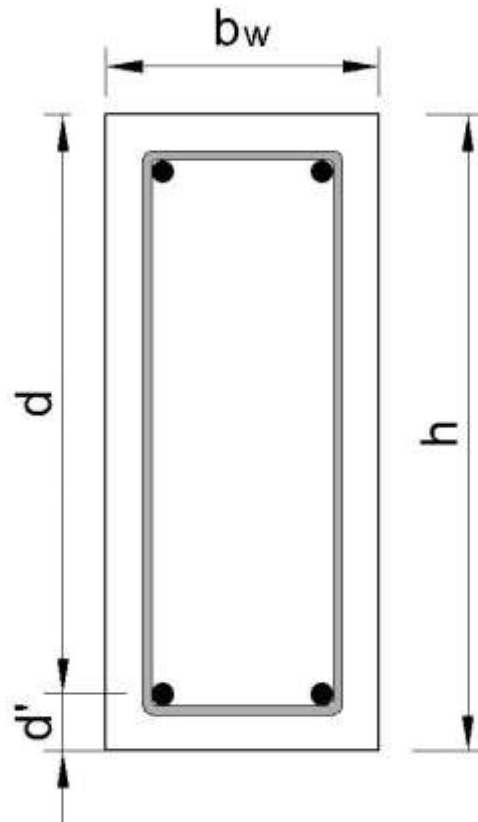
A NBR 6118:2014 (item 13.2.2), recomenda que a seção transversal das vigas não possua largura ( $b_w$ ) menor que 12 cm. Porém, estes limites podem ser reduzidos, respeitando-se um mínimo absoluto de 10 cm em casos excepcionais, sendo obrigatoriamente respeitadas as seguintes condições:

- alojamento das armaduras e suas interferências com as armaduras de outros elementos estruturais, respeitando os espaçamentos e coberturas estabelecidas na NBR 6118:2014;
- lançamento e vibração do concreto de acordo com a NBR 14931:2004 - Execução de estruturas de concreto.

Em relação à altura, as exigências que seguem referem-se a vigas isostáticas com relação  $l/h \geq 2,0$  e a vigas contínuas com relação  $l/h \geq 3,0$ , em que ( $l$ ) é o comprimento do vão teórico (ou o dobro do comprimento teórico, no caso de balanço) e ( $h$ ) a altura total da viga. Vigas com relações  $l/h$  menores devem ser tratadas como vigas-parede (NBR 6118:2014).

Altura útil, representada por ( $d$ ), é a distância entre o centro de gravidade da armadura tracionada até a fibra mais comprimida do concreto e ( $d'$ ) é a distância entre o centro de gravidade da armadura comprimida até a fibra mais comprimida do concreto (PARIZOTTO, 2015), exemplificada na Figura 19.

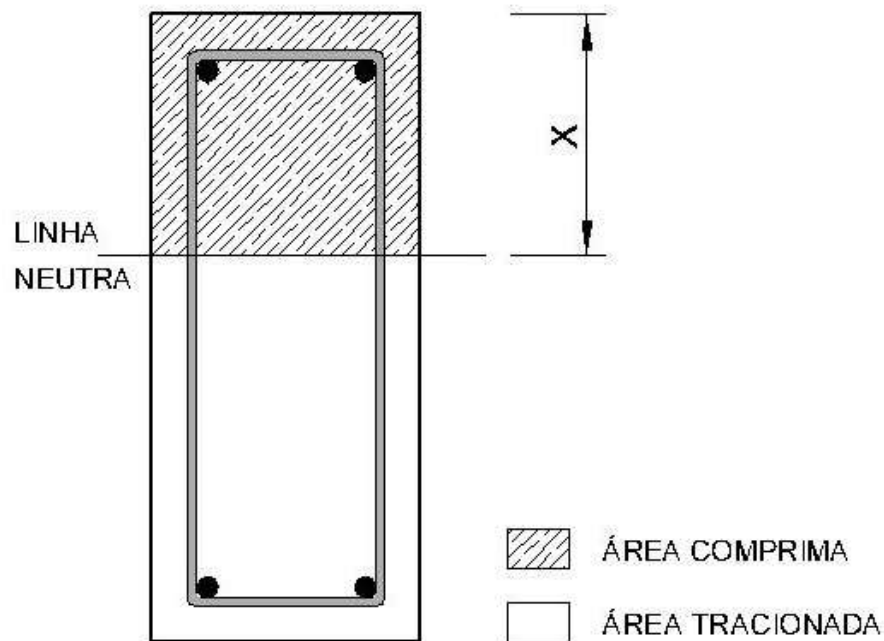
Figura 19 — Dimensões da seção transversal de uma viga retangular.



Fonte: Acervo do autor (2016).

A profundidade da linha neutra (Figura 20), representada por  $x$ , é a distância da borda mais comprimida do concreto até o ponto em que as tensões e as deformações são nulas (distância da linha neutra ao ponto de maior encurtamento da seção transversal de uma peça fletida) (DEIFELD, 2013).

Figura 20 — Altura da linha neutra.



Fonte: Acervo do autor (2016).

Ao tomar como base a deformada da viga e os esforços internos de tração e compressão, pode-se concluir que a armadura principal ou positiva deve estar posicionada de forma a conter os esforços de tração no centro do vão, abaixo da linha neutra da peça, na parte inferior da seção, onde estes esforços apresentam valores máximos. Enquanto acima da linha neutra localiza-se a armadura construtiva ou de compressão, que se destina a manter o formato da seção, manter os estribos na posição de projeto e conter uma possível compressão, caso a seção transversal esteja com uma área inferior ao mínimo desejado (BORGES, 2010).

### 2.2.10 Pré-dimensionamento

Primeiramente, todo engenheiro estrutural se depara com o seguinte impasse ao dimensionar uma estrutura: a geometria dos elementos estruturais (seções transversais) que é definida em função dos esforços solicitantes. Todavia, os esforços solicitantes apenas podem ser obtidos após a definição da geometria da estrutura, permitindo a determinação do peso próprio e a análise da estabilidade global da mesma. Para minimizar esse problema, é fundamental realizar um pré-dimensionamento da estrutura, ou seja, determinar, de forma aproximada, as dimensões das seções transversais dos elementos estruturais, as quais serão utilizadas numa análise preliminar. Após esta verificação inicial, devem-se fazer os

ajustes necessários, determinando a geometria final e, conseqüentemente, o carregamento real que permite o dimensionamento das armaduras (ALVA, 2007).

Pinheiro (2003) estima a altura das vigas de acordo a posição das mesmas na estrutura.

a) Tramos internos:

$$h_{est} = \frac{l_0}{12} \quad (6)$$

b) Tramos externos ou vigas biapoiadas:

$$h_{est} = \frac{l_0}{10} \quad (7)$$

c) Balanços:

$$h_{est} = \frac{l_0}{5} \quad (8)$$

É habitual adotar alturas de seção múltiplas de 5,0 cm, com um mínimo de 25,0 cm. Tal critério de altura mínima induz a utilização de vãos maiores ou iguais a 2,5 m. A altura máxima está ligada ao espaço disponível para a viga e para as aberturas de portas. Logo, as alturas das vigas dos pavimentos não devem ultrapassar a distância de piso a piso menos a altura das portas e caixilhos. Em geral não devem ser utilizados vãos de vigas superiores a 6,0 m e valores usuais de pé-direito, em torno de 2,8 m (ALVA, 2007).

Bastos (2015) afirma que, de modo geral, a preferência dos calculistas e projetistas é que as vigas fiquem embutidas nas paredes de vedação, de tal forma que não possam ser percebidas visualmente. Para que isso ocorra, a largura das vigas deve ser escolhida de acordo com a espessura final da parede, a qual depende basicamente das dimensões e da posição de assentamento das unidades de alvenaria (tijolo maciço, bloco furado, bloco de concreto, etc.), e da espessura da argamassa de revestimento (reboco), nos dois lados da parede. Sendo que essa largura não seja menor que 12,0 cm e um mínimo absoluto de 10,0 cm em casos excepcionais. O revestimento com argamassa tem usualmente a espessura de 1,5 cm a 2,0 cm.

### 2.2.11 Valores de cálculo

Segundo Clímaco (2008), os valores de cálculo de uma grandeza de interesse estrutural são os valores característicos multiplicados por coeficientes de ponderação, que tem a finalidade de prever a possibilidade de ocorrência de valores

mais desfavoráveis, seja na execução ou durante a vida útil da estrutura, sob utilização nas condições previstas em projeto.

Quanto aos materiais, devem ser introduzidos coeficientes de minoração nas resistências características, prevendo a possibilidade de ocorrerem resistências inferiores previstas em projeto. Esses coeficientes são utilizados em razão de problemas executivos e deficiências nos materiais constitutivos, inerentes à própria natureza das construções de concreto, e de imperfeições no controle tecnológico (CLÍMACO, 2008).

A NBR 6118:2014 especifica que a resistência de cálculo do concreto ( $f_{cd}$ ) deve ser verificada no estado-limite último, em 28 dias ou mais, e sua expressão é dada por:

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (9)$$

A mesma norma também especifica que a resistência do aço ( $f_{yd}$ ) deve ser minorada, para garantir uma maior segurança em relação ao controle tecnológico do aço. Sua expressão é dada por:

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (10)$$

Os valores para a verificação no estado-limite último estão indicados na Tabela 4.

Tabela 4 — Valores dos coeficientes  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$ .

Combinações	Concreto	Aço
	$\gamma_c$	$\gamma_s$
Normais	1,4	1,15
Especiais ou de construção	1,2	1,15
Excepcionais	1,2	1,0

Fonte: NBR 6118:2014 (item 12.4.1).

As ações e solicitações devem ser previstas majorações, para levar em conta a possibilidade de ocorrência de valores de esforços maiores que os adquiridos na análise estrutural. Esse coeficiente é utilizado em razão de fatores como a imprecisão na análise de cargas, hipóteses aproximadas dos métodos de cálculo, imperfeições geométricas na execução das peças, em relação às dimensões originais de projeto, e outras inevitáveis imperfeições na execução (CLÍMACO, 2008).

Para cálculos no estado-limite último de estruturas comuns de concreto armado, em geral, os esforços de cálculo são obtidos da multiplicação dos esforços característicos ( $F_k$ ) das ações permanentes e variáveis pelo coeficiente  $\gamma_f$ , dado por (NBR 8681:2003):

$$F_d = F_k \cdot \gamma_f \quad (11)$$

Admite-se, dessa forma, que a passagem da estrutura ao estado-limite último ocorra em um regime linear, com um acréscimo de 40% nos esforços solicitantes de serviço, logo  $\gamma_f = 1,4$  (CLÍMACO, 2008).

### **2.2.12 Dimensionamento da armadura longitudinal em vigas retangulares submetidas à flexão normal**

Silva N. (2005) afirma que, dentre os esforços solicitantes em condições normais, o momento fletor  $M$ , é o esforço preponderante no dimensionamento de peças estruturais como vigas. Quando o momento fletor atua segundo um plano que contenha um dos eixos principais da seção transversal, com a ausência de uma força normal  $N$ , é denominada flexão normal simples.

O objetivo do dimensionamento, da verificação e do detalhamento é obter valores de largura ( $b_w$ ), altura ( $h$ ), altura útil ( $d$ ), resistência característica do concreto à compressão ( $f_{ck}$ ), resistência característica do aço à tração (CA-25, 50 ou 60). Em que garantam segurança, em relação aos estados limites último (ELU) e de serviço (ELS), da estrutura como um todo ou de cada uma de suas partes (NBR 6118:2014).

Para Carvalho e Figueiredo Filho (2015), o cálculo da quantidade de armadura longitudinal, para seções transversais retangulares é feita de maneira simples, a partir do equilíbrio das forças atuantes na seção.

A NBR 6118:2014 prescreve no item 14.6.4.3, limites para redistribuição de momentos e condições de ductilidade: “A capacidade de rotação dos elementos estruturais é função da posição da linha neutra no ELU. Quanto menor é  $x/d$ , maior é essa capacidade”.

Para melhorar a ductilidade das estruturas nas regiões de apoios das vigas ou de ligações com outros elementos estruturais, mesmo quando não forem feitas redistribuições de esforços solicitantes, a posição da linha neutra no ELU deve obedecer aos seguintes limites:

$$a) \ x/d \leq 0,45 \text{ para concretos com } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}; \quad (12)$$

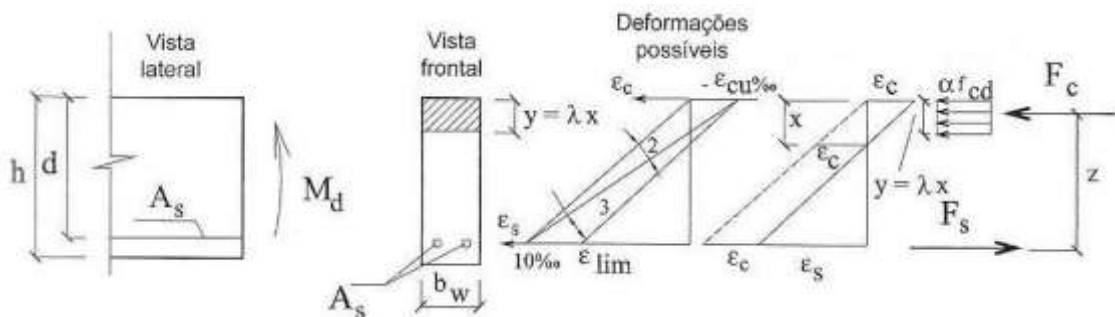
$$b) x/d \leq 0,35 \text{ para concretos com } 50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}'' \quad (13)$$

Garantir a profundidade relativa da linha neutra de acordo com estes limites faz com que o elemento estrutural fique dimensionado de tal forma a evitar a ruptura frágil.

### 2.2.13 Equacionamento para armadura longitudinal

Carvalho e Figueiredo Filho (2015) considera o seguinte problema: conhecido  $f_{ck}$ ,  $b_w$ ,  $d$ , tipo de aço ( $f_{yd}$  e  $\epsilon_{yd}$ ) e o momento de cálculo  $M_d$  ( $M_d = 1,4 \cdot M_k$ ), determinar a área da armadura longitudinal ( $A_s$ ) para que uma viga de concreto armado de seção transversal retangular resista a esse momento. A Figura 21 representa situação de elemento de seção retangular sob flexão simples, com os diagramas de deformações e tensões para todas as classes de concreto.

Figura 21 — Elemento de seção retangular e diagramas de deformações e tensões na seção solicitada para flexão simples para concretos de todas as classes.



Fonte: Carvalho e Figueiredo Filho (2015).

#### a) Equilíbrio da seção

Carvalho e Figueiredo Filho (2015) propõem as seguintes condições:

Equilíbrio das forças atuantes normais à seção transversal: como não existe força externa, a força atuante no concreto ( $F_c$ ) deve ser igual à força atuante na armadura ( $F_s$ ):

$$\sum F = 0 \rightarrow F_s - F_c = 0 \rightarrow F_s = F_c \quad (14)$$

Equilíbrio dos momentos: o momento das forças internas em relação a qualquer ponto (no caso, em relação ao CG da armadura) deve ser igual ao momento externo de cálculo:

$$\sum M = M_d \rightarrow M_d = F_c \cdot z \quad (15)$$

Das equações acima tem-se:

$$M_d = F_s \cdot z \quad (16)$$

*b) Posição da linha neutra (x)*

Carvalho e Figueiredo Filho (2015) afirma que ao conhecer a posição da linha neutra, é possível saber o domínio em que a peça está trabalhando e calcular a resultante das tensões de compressão do concreto ( $F_c$ ) e o braço de alavanca ( $z$ ).

$$F_c = (\alpha_c \cdot f_{cd}) \cdot (b_w) \cdot (\lambda \cdot x) \quad (17)$$

$$z = d - 0,5 \cdot \lambda \cdot x \quad (18)$$

Sendo:

$$\lambda = 0,8 \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

$$\lambda = 0,8 - \left( \frac{f_{ck} - 50}{400} \right) \text{ para } 50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa (} f_{ck} \text{ em MPa)} \quad (19)$$

Em que:

- Para concretos de classes até C50:

$$\alpha_c = 0,85$$

- Para concretos de classes C50 até C90:

$$\alpha_c = 0,85 \cdot \left[ 1,0 - \left( \frac{f_{ck} - 50}{200} \right) \right] \quad (20)$$

Colocando  $F_c$  e  $z$  na equação anterior, tem-se:

$$M_d = b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \lambda \cdot x \cdot (d - 0,5 \cdot \lambda \cdot x) \quad (21)$$

Simplificando, obtém-se:

$$M_d = b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot (d \cdot \lambda \cdot x - 0,5 \cdot \lambda^2 \cdot x^2) \quad (22)$$

Desse modo, Carvalho e Figueiredo Filho (2015) afirma que ao resolver a equação acima obtém-se  $x$ , o qual define a posição da linha neutra, que é fundamental para a solução do problema proposto. Nota-se que a variação de  $x$  não é linear com o esforço solicitante  $M_d$ , mas segue um polinômio do segundo grau.

$$x = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 2 \cdot \left( \frac{M_d}{b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd}} \right)}}{\lambda} \quad (23)$$

*c) Cálculo da área necessária de armadura ( $A_s$ )*

De acordo com Carvalho e Figueiredo Filho (2015) com o valor de  $x$  determinado é possível encontrar  $A_s$ . A força de armadura ( $F_s$ ) vem do produto da área de aço ( $A_s$ ) pela tensão atuante no aço ( $f_s$ ). Tendo  $M_d/z = F_s = f_s \cdot A_s$ , resultando em:

$$A_s = \frac{M_d}{z \cdot f_s} \quad (24)$$



Ainda segundo os mesmos autores, admite-se que a peça esteja trabalhando nos domínios 2 ou 3, para um melhor aproveitamento da armadura, tem-se  $\epsilon_s \geq \epsilon_{yd}$ , resultando na tensão de escoamento na armadura ( $f_s = f_{yd}$ ); caso contrário, tira-se o valor de  $\epsilon_s$  do diagrama de tensão versus deformação do aço e calcula-se  $f_s$ , ficando:

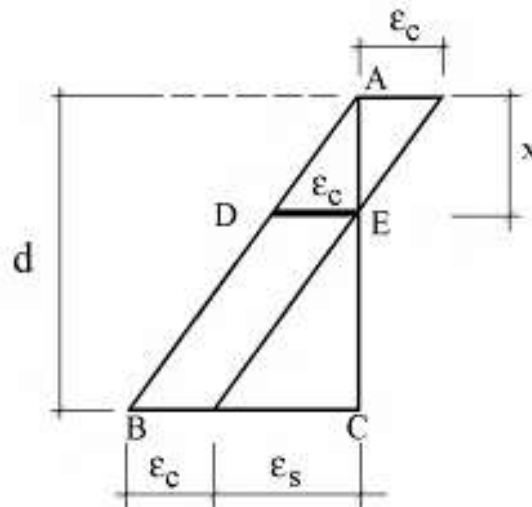
$$A_s = \frac{M_d}{z \cdot f_{yd}} \quad (25)$$

*d) Verificação do domínio em que a peça atingirá o estado-limite último*

Ao obter o valor de  $x$ , que define a posição (altura) da linha neutra, é possível analisar em que domínio a peça atingirá o estado-limite último que é muito importante para o caso de concreto armado. Na flexão simples, que é o que está sendo considerado, os domínios possíveis são o 2, o 3 e o 4. No início do domínio 2 tem-se  $\epsilon_c = 0$ , e no final do domínio 4 tem-se  $\epsilon_s = 0$ , que são as piores situações que podem ocorrer (um dos materiais não contribui na resistência). O ideal é que a viga trabalhe no domínio 3; o domínio 2 é aceitável e o domínio 4 deve ser evitado (CARVALHO e FIGUEIREDO FILHO, 2015).

Relação entre deformações: como as seções permanecem planas após a deformação, por semelhança de triângulos ABC e ADE do diagrama de deformações (Figura 22), é possível obter a relação entre a posição da linha neutra e a altura útil (d):

Figura 22 — Relação entre a posição da linha neutra e a altura útil.



Fonte: Carvalho R. (2012).

$$\frac{x}{\epsilon_c} = \frac{d}{\epsilon_c + \epsilon_s} \rightarrow \frac{x}{d} = \frac{\epsilon_c}{\epsilon_c + \epsilon_s} \quad (26)$$

Posição da linha neutra: no limite do domínio 2 e em todo domínio 3, a deformação específica do concreto é  $\varepsilon_c = 3,5\text{‰}$  (0,0035); inserindo esses valores na Equação 26, resulta:

$$\frac{x}{d} = \frac{0,0035}{0,0035 + \varepsilon_s} \quad (27)$$

Carvalho e Figueiredo Filho (2015) conclui que para uma seção conhecida, a posição da linha neutra, no domínio 3, depende apenas da deformação específica do aço, e com as novas especificações da NBR 6118:2014, não é mais possível usar os valores do domínio 3 que sejam maiores a  $x = 0,45.d$ .

*e) Cálculo do máximo momento resistente da seção ( $M_{lim}$ )*

Para determinar o maior momento que uma seção consegue resistir é necessário conhecer as dimensões da seção transversal ( $b_w$  e  $d$ ), o tipo do aço ( $f_{yd}$  e  $\varepsilon_{yd}$ ) e a resistência do concreto ( $f_{ck}$ ) (CARVALHO e FIGUEIREDO FILHO, 2015). Segundo a NBR 6118:2003, o valor do maior momento será alcançado quando  $x$  for o maior possível, mas limitado pelo não emprego do domínio 4. Mas a nova atualização da norma 6118:2014 agora exige que o momento máximo para concreto de classe até C50 seja limitado por  $x/d = 0,45$  e para concreto de classe C50 até C90 por  $x/d = 0,35$ . É dada pela expressão:

$$M_{lim} = b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \lambda \cdot \left(\frac{x}{d}\right) \cdot d^2 \cdot \left(1 - 0,5 \cdot \lambda \cdot \left(\frac{x}{d}\right)\right) \quad (28)$$

*f) Cálculo de seções com armadura dupla*

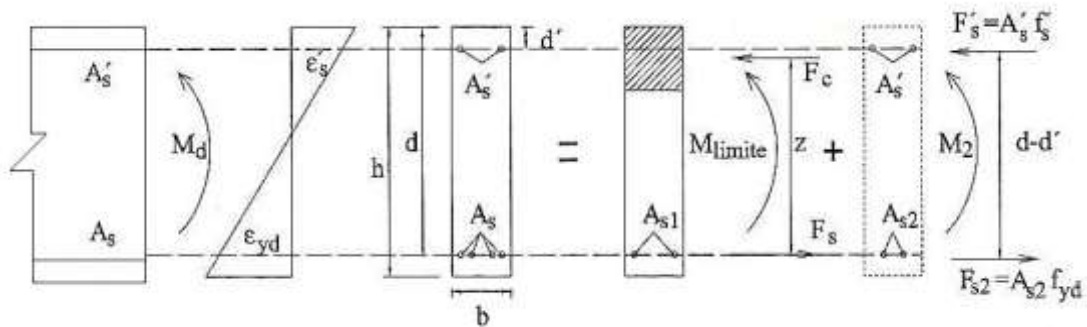
Podem haver situações em que por imposições de projeto ou arquitetônicas, seja preciso utilizar para a viga uma altura menor que a altura mínima exigida pelo momento fletor atuante de cálculo (CARVALHO e FIGUEIREDO FILHO, 2015). Para garantir boas condições de ductilidade é necessário utilizar armadura de compressão que garante a posição adequada da linha neutra ( $x$ ) (SILVA, N., 2005).

Para Carvalho e Figueiredo Filho (2015), o momento limite ( $M_{lim}$ ) que a seção consegue resistir com a sua altura real e com a armadura apenas tracionada (armadura simples  $A_{s1}$ ), trabalhando no limite  $x/d$  para a classe do concreto é dado por:

$$M_2 = M_d - M_{lim} \quad (29)$$

A Figura 23 ilustra esquematicamente o problema.

Figura 23 — Seção de uma viga com armadura dupla.



Fonte: Carvalho e Figueiredo Filho (2015).

A armadura  $A_{s1}$  é obtida da Equação 25, com  $M_{lim}$  no lugar do  $M_d$  e o  $z_{lim}$  no lugar do  $z$  (CARVALHO e FIGUEIREDO FILHO, 2015):

$$A_{s1} = \frac{M_{lim}}{z_{lim} \cdot f_{yd}} = \frac{M_{lim}}{(d - 0,5 \cdot \left(\frac{x}{d}\right) \cdot d \cdot \lambda) \cdot f_{yd}} \quad (30)$$

Em que concretos de classe até C50,  $x/d = 0,45$  e para concreto de classe C50 até C90,  $x/d = 0,35$ .

A armadura tracionada total ( $A_s$ ), ou seja,  $A_s = A_{s1} + A'_s$ , resulta em:

$$A_s = \frac{M_{lim}}{(d - 0,5 \cdot \left(\frac{x}{d}\right) \cdot d \cdot \lambda) \cdot f_{yd}} + \frac{M_d - M_{lim}}{(d - d') \cdot f_{yd}} \quad (31)$$

Fazendo o equilíbrio de momentos em relação ao centro de gravidade da armadura tracionada na seção com  $M_2$ , obtem-se  $A'_s$ :

$$A'_s = \frac{M_d - M_{lim}}{(d - d') \cdot f_{yd}} \quad (32)$$

Por fim, Carvalho e Figueiredo Filho (2015) salientam que é preciso conhecer a deformação específica da armadura comprimida  $\epsilon'_s$  para encontrar a tensão na armadura comprimida  $f'_s$ :

$$\epsilon'_s = \frac{0,35 \cdot (x_{lim} - d')}{x_{lim}} \quad (33)$$

#### g) Armadura longitudinal mínima

Em vigas, onde o seu principal esforço é a flexão (NBR 6118:2014) item 14.4.1.1, um erro na quantidade de aço adotada, pode ocasionar uma ruptura brusca da seção, sem aviso nem possibilidade de reforço ou recuperação da peça. Logo, é fundamental adotar uma taxa mínima de armadura de tração para vigas de concreto armado, a qual impedirá a ruína precoce da seção da viga, ainda no início da fissuração do concreto (SILVA e ARAÚJO, 2015).

Apesar da norma NBR 6118:2014 trazer valores de taxas mínimas de armadura de tração para vigas com seções retangulares. A norma considera uma relação entre altura útil e altura da seção ( $d/h$ ) de 0,80, podendo ser um fator limitante, pois a cada viga dimensionada essa relação pode ser diferente. Mesmo sendo usual na elaboração de projetos, neste trabalho foi utilizado o método proposto por Araújo (2014), em que a variação não somente ocorre em função do  $f_{ck}$ , mas também pelo tipo de aço ( $f_{yd}$ ).

De acordo com (ARAÚJO, 2014), a taxa de armadura mínima deve ser obtida a partir da Equação (34), onde  $f_{ctm}$  é a resistência média à tração do concreto, e é dada em função da classe de resistência do concreto:

$$\rho_{min} = 0,26 \cdot \frac{f_{ctm}}{f_{yd}} \quad (34)$$

Substituindo na Equação (34) as expressões de  $f_{ctm}$  constantes na edição de 2014 da NBR 6118, a qual abrange concretos das classes C20 a C90, tem-se:

$$\rho_{min} = \frac{0,078 \cdot f_{ck}^{(2/3)}}{f_{yd}} \quad \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (35)$$

$$\rho_{min} = \frac{0,5512 \cdot \ln(1+0,11 \cdot f_{ck})}{f_{yd}} \quad \text{para } 50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \quad (36)$$

Esses valores devem atender a taxa mínima absoluta imposta pela NBR 6118 que é  $\rho_{min} = 0,15\%$ . Logo a área de aço mínima é dada por:

$$A_{s,min} = \rho_{min} \cdot A_c \quad (37)$$

#### *h) Armadura longitudinal máxima*

Toda viga deve respeitar o limite máximo de armaduras, a fim de não comprometer o adensamento, compactação do concreto e evitar grande concentração de aço. A NBR 6118:2014 estabelece que a soma das armaduras de tração e de compressão ( $A_s + A'_s$ ) não pode ser maior que 4% da área de concreto ( $A_c$ ), calculada em região fora da zona de emendas, logo:

$$A_{s,max} = 4\% \cdot A_c \quad (38)$$

### 2.3 VIGAS SUBMETIDAS À FORÇA CORTANTE

Esta seção foi dedicada a vigas submetidas à força cortante, em que foi feita uma ampla explicação sobre o tema e ao final obteve-se o equacionamento para o dimensionamento dos estribos.

### 2.3.1 Fatores que influenciam a resistência à força cortante

Muitos fatores podem influenciar a resistência das vigas à força cortante, mas alguns deles não há conhecimento o suficiente da sua influência. Leonhardt e Mönnig (1982) apresentam alguns dos principais fatores:

#### *a) Tipo de carregamento*

Em alguns ensaios feitos por Leonhardt e Mönnig (1982) com vigas esbeltas sem armadura transversal e com carregamento uniformemente distribuído, indicaram uma capacidade resistente à força cortante cerca de 20% a 30% maior do que para carga concentrada na posição mais desfavorável. Na prática, por não haver garantia de uma distribuição uniforme da carga de utilização, por isso, no dimensionamento devem-se levar em consideração os resultados mais desfavoráveis referentes às cargas concentradas.

#### *b) Posição da carga e esbeltez*

A distância do apoio até a carga concentrada tem uma grande influência à resistência a força cortante. No caso das cargas uniformes, tem grande influência a esbeltez  $l/h$ . A situação mais desfavorável, levando os maiores perigos de ruptura por força cortante é quando o  $l/h = 10$  a  $14$ , ocasionando na menor capacidade resistente à força cortante. Quanto menor a distância entre a carga e o apoio, maior será a capacidade de resistência à força cortante. Para cargas distribuídas, esse aumento da capacidade ocorre quando  $l/h < 10$ , devendo prever uma boa ancoragem da armadura longitudinal do banzo tracionado (BASTOS, 2015).

#### *c) Tipo de introdução da carga*

No caso de ligações em que uma viga se apoia na outra, a viga que apoia distribui sua carga ao longo da altura da alma da viga que serve de apoio. Esta situação é denominada carregamento ou apoio indireto. Em ensaios realizados por Leonhardt e Mönnig (1982), foi possível provar que na região de cruzamento dessas vigas, é necessário uma armadura de suspensão, que deve ser dimensionada para a força total atuante no apoio ou nó, sendo que essa armadura atende simultaneamente à função de armadura de transversal. Contudo, exceto em regiões de cruzamento, a viga não sofre nenhuma influência pelo tipo de introdução de

carga ou de apoio, ou seja, o comportamento em relação à força cortante é o mesmo que para o apoio ou carregamento direto.

*d) Influência da armadura longitudinal*

Para Bastos (2015), o aumento de uma fissura inclinada por força cortante até próximo da borda superior da zona comprimida de concreto depende da rigidez à deformação do banzo tracionado, ou seja, quanto mais fraco for o banzo tracionado, tanto mais a fissura cresce com o aumento da carga, tão quanto o aumento da periculosidade da fissura.

Outra influência é a qualidade da armadura longitudinal. Ensaios realizados por Leonhardt e Mönning (1982), demonstraram, por exemplo, que para a mesma porcentagem de armadura longitudinal, uma distribuição das tensões com maior número de barras finas influencia favoravelmente a capacidade resistente à força cortante.

*e) Influência da forma da seção transversal*

A forma da seção transversal tem uma forte influência sobre o comportamento resistente de vigas de concreto armado sujeitas à força cortante. A seção transversal retangular pode se adequar livremente a uma forte inclinação do banzo comprimido e, frequentemente, pode absorver toda a força transversal no banzo comprimido, em especial no caso de carga distribuída e de carga concentrada próxima ao apoio. Em vigas de seções retangulares, os estribos são submetidos a tensões de compressão até que, pouco antes da carga de ruptura, uma fissura de cisalhamento cruze o estribo (BASTOS, 2015).

*f) Influência da altura da viga*

Ensaios realizados por Leonhardt e Mönning (1982) em que vigas sem armadura transversal e diferentes alturas  $h$ , com igual porcentagem de armadura longitudinal de mesma distribuição de barras, apresentaram que a capacidade resistente à força cortante há uma diminuição notável como aumento da altura  $h$ .

### **2.3.2 Comportamento resistente de vigas sem armadura transversal**

Alguns estudos experimentais feitos por Carelli (2002) mostraram que a capacidade de resistência a força cortante de uma viga de concreto armado pode

ser dividida em duas parcelas, uma resistida pelo concreto e seus mecanismos auxiliares e outra resistida pela armadura transversal. Isto é, mesmo sem uma armadura transversal uma viga apresenta capacidade de resistir a uma determinada força cortante, que ao atingir a resistência do concreto, pode sofrer uma ruptura brusca.

Segundo Joint ACI-ASCE Committee 426<sup>3</sup> (1973 apud CARELLI, 2002), a parcela de resistência de uma estrutura de concreto armado sujeita a força cortante, é a soma de diversos mecanismos capazes de transmitir esforços entre as seções como:

- *Efeito de arco*: este efeito confere à viga um acréscimo em sua capacidade resistente e está presente principalmente nas vigas com vãos reduzidos (vigas curtas).
- *Concreto não fissurado*: este mecanismo ocorre em trechos não fissurados da viga (entre duas fissuras consecutivas) ou em partes não fissuradas de elementos fissurados (zona de compressão de uma seção fissurada);
- *Engrenamento dos agregados*: este mecanismo ocorre entre as duas superfícies originadas por uma fissura. A contribuição do engrenamento dos agregados para a resistência ao cisalhamento depende da largura da fissura e da rugosidade das superfícies;
- *Efeito de pino*: a armadura longitudinal suporta uma parcela do deslocamento causado pela força cortante devido ao efeito de pino na barra. A força de pino na barra da armadura longitudinal depende da rigidez da barra no cruzamento com a fissura.

### **2.3.3 Comportamento resistente de vigas com armadura transversal**

Quando as tensões principais de tração alcançam a resistência do concreto à tração, aparecem as primeiras fissuras inclinadas. Com o surgimento e a propagação das fissuras, ocorre uma redistribuição dos esforços internos, e a armadura transversal e as diagonais comprimidas passam a resistir de maneira mais

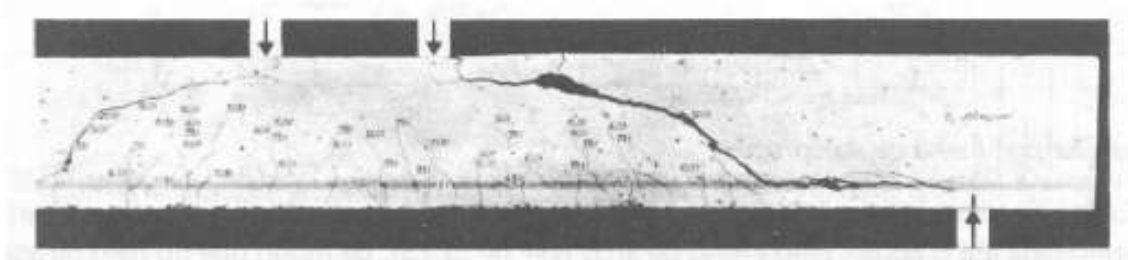
---

<sup>3</sup> ACI-ASCE Committee 426. **The Shear Strength of Reinforced Concrete Members**. In: Journal of the Structural Division, Vol. 99, N° ST6, June, 1973, pp. 1091 – 1187

efetiva, sendo que essa redistribuição depende da quantidade e da direção da armadura transversal (LEONHARDT E MÖNNIG,1982).

Bastos (2015) afirma que quando as tensões de tração forem muito altas e a armadura transversal for insuficiente, logo, o aço atinge a deformação de início de escoamento ( $\epsilon_y$ ), e as fissuras inclinadas por efeito da força cortante, próximas ao apoio, desenvolvem-se rapidamente em direção ao banzo comprimido, diminuindo a sua seção resistente, podendo levar ao rompimento. A fissura também pode se alastrar pela armadura longitudinal de tração nas proximidades do apoio, separando-a do restante da viga (Figura 24).

Figura 24 — Ruptura de viga por rompimento do banzo superior comprimido do concreto.

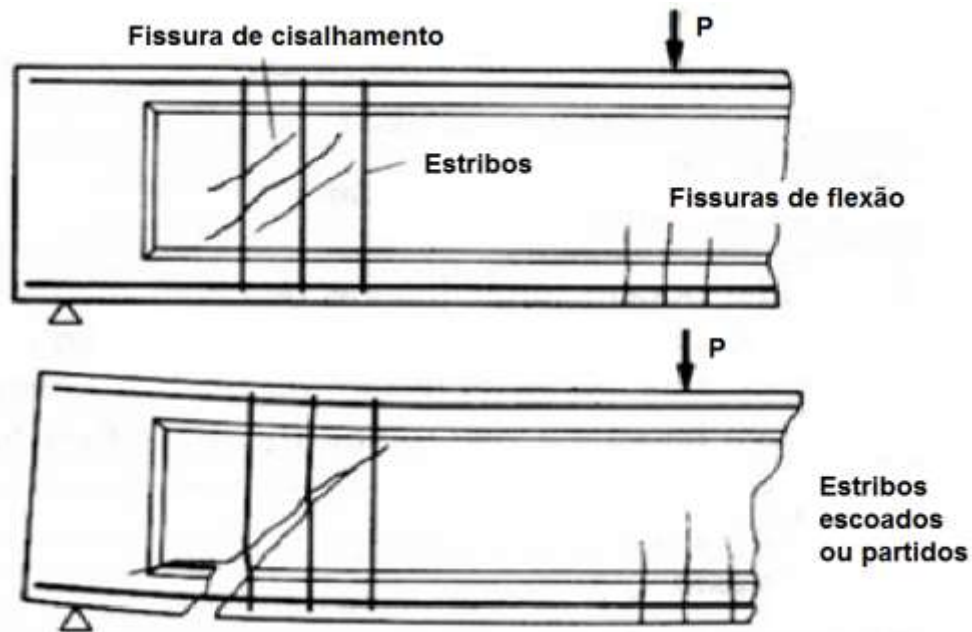


Fonte: Leonhardt e Mönnig (1982).

A existência de armadura transversal altera significativamente o comportamento das vigas após o surgimento das fissuras inclinadas, que ocorrem nas proximidades dos apoios. Ao ser interceptado pela fissura, o estribo faz a ponte de transferência das tensões de tração entre os dois lados da fissura, e os estribos podem escoar se atingirem a tensão  $f_y$ , ocasionando o rompimento ou deformação excessiva dos estribos, antes da ruptura do banzo comprimido, ou a ruptura na ligação das diagonais comprimidas com o banzo comprimido. A Figura 25 mostra a ruptura que pode ocorrer por rompimento ou deformação excessiva dos estribos (BASTOS,2015).



Figura 25 — Ruína da viga por rompimento dos estribos.



Fonte: Leonhardt e Mönning (1982).

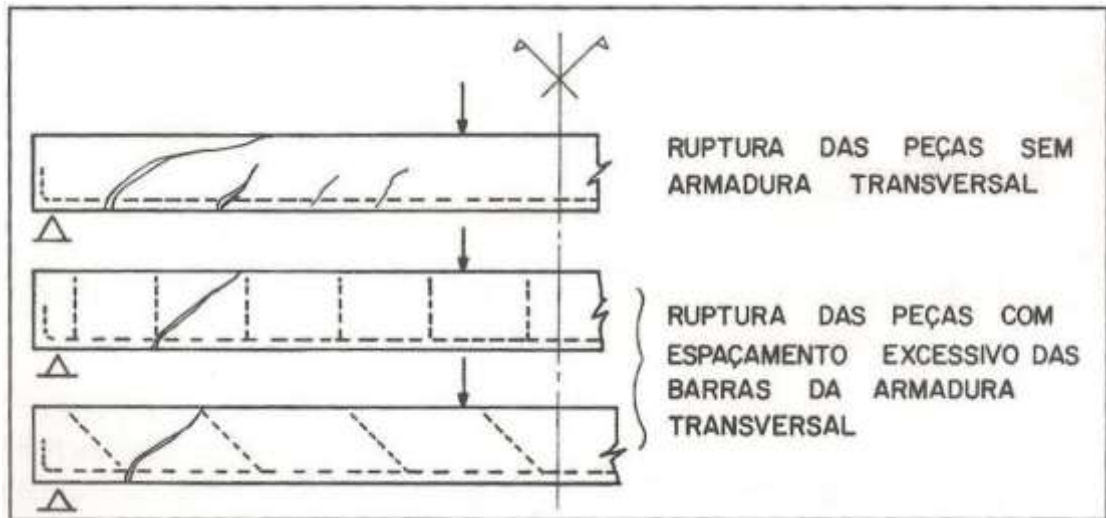
#### 2.3.4 Modos de ruptura de vigas submetidas a forças cortantes

A ruptura das vigas de concreto armado submetidas à força cortante ocorre de maneira frágil sem apresentar grandes indícios de esgotamento da sua capacidade resistente, segundo Fusco (2008) podem ser classificadas da seguinte maneira:

- a) Modos de ruptura na ausência de armaduras transversais eficazes
  - i) *Ausência da armadura transversal*: faz com que a resistência da peça dependa da resistência à tração do concreto e de outros fenômenos resistentes associados à estrutura interna da peça;
  - ii) *Espaçamento excessivo das barras transversais*: neste caso não consegue-se uma segurança em relação à ruptura frágil (não avisada), pois o espaçamento das barras é excessivo ou possui arranjos defeituosos. A única maneira de garantir a segurança em relação a esse modo de ruptura é respeitar os afastamentos máximos permitidos.

Esses tipos de rupturas são exemplificados na Figura 26.

Figura 26 — Modo de ruptura na ausência de armaduras transversais eficazes.



Fonte: Fusco (2008).

b) Modos de ruptura na presença de armaduras transversais eficazes

i) *Ruptura força cortante-compressão*: este tipo de ruptura ocorre quando a tensão de compressão na biela atinge a resistência à compressão do concreto, a qual é reduzida devido a seu estado fissurado;

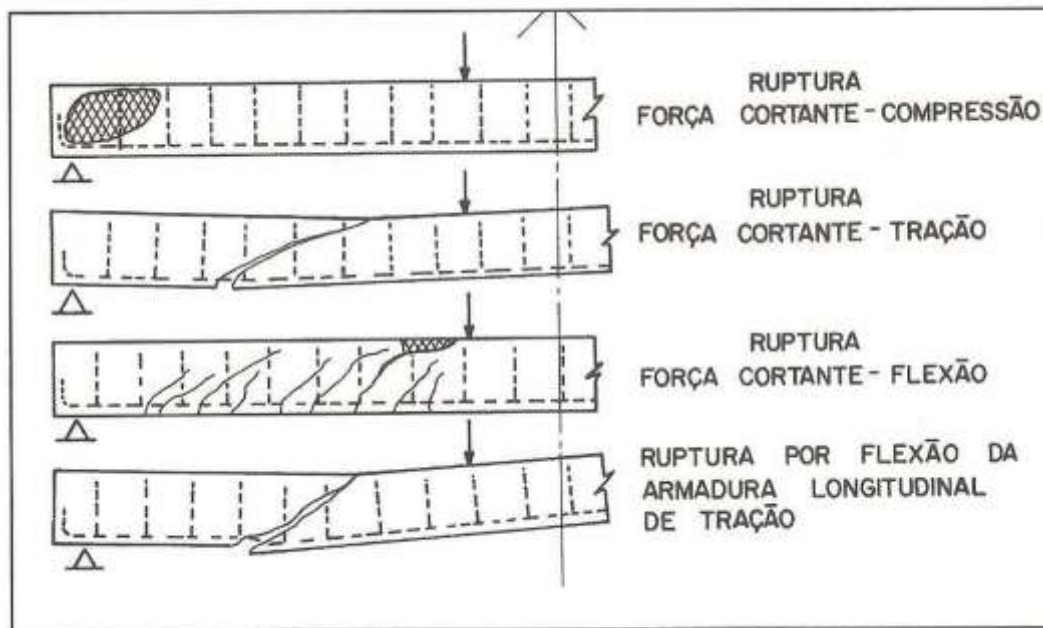
ii) *Ruptura força cortante-tração*: este tipo de ruptura ocorre quando a resistência da armadura transversal é superada. Para garantir uma segurança em relação a esse modo de ruptura, é preciso que seja empregada uma quantidade suficiente de armadura.

iii) *Ruptura força cortante-flexão*: este tipo de ruptura ocorre quando há interação da força cortante com o momento fletor nas proximidades de cargas concentradas elevadas;

iv) *Ruptura por flexão da armadura longitudinal*: pode ocorrer quando as bielas diagonais de concreto provocam tensões de flexão muito elevadas nas armaduras longitudinais, devido ao espaçamento excessivo dos estribos ou a ancoragem deficiente dos mesmos.

Estes tipos de rupturas são exemplificados na Figura 27.

Figura 27 — Modo de ruptura na presença de armaduras transversais eficazes.

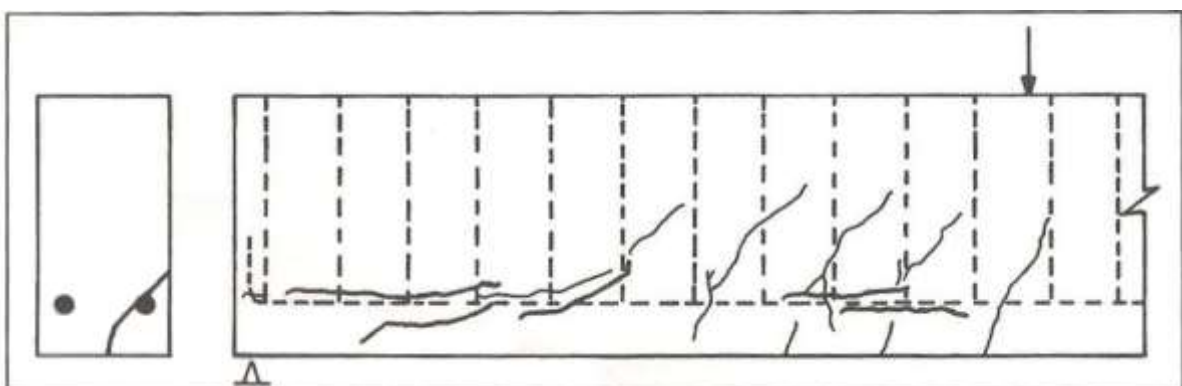


Fonte: Fusco (2008).

### c) Modos de ruptura por deficiência das ancoragens

As barras de aço da armadura longitudinal de tração, nos trechos retos em que há variações bruscas do momento fletor e também nas ancoragens de extremidade, tendem a escorregar em relação ao concreto que as envolve, com o aparecimento de tensões longitudinais de cisalhamento na interface dos dois materiais. Essas tensões podem provocar o fendilhamento longitudinal do concreto, com o desligamento significativo dos materiais, como pode-se observar na Figura 28. Podendo provocar o desaparecimento do concreto armado como material composto, de funcionamento solidário do aço com o concreto (FUSCO, 2008).

Figura 28 — Modo de ruptura por deficiência das ancoragens.



Fonte: Fusco (2008).

### **2.3.5 Analogia da treliça de Mörsch**

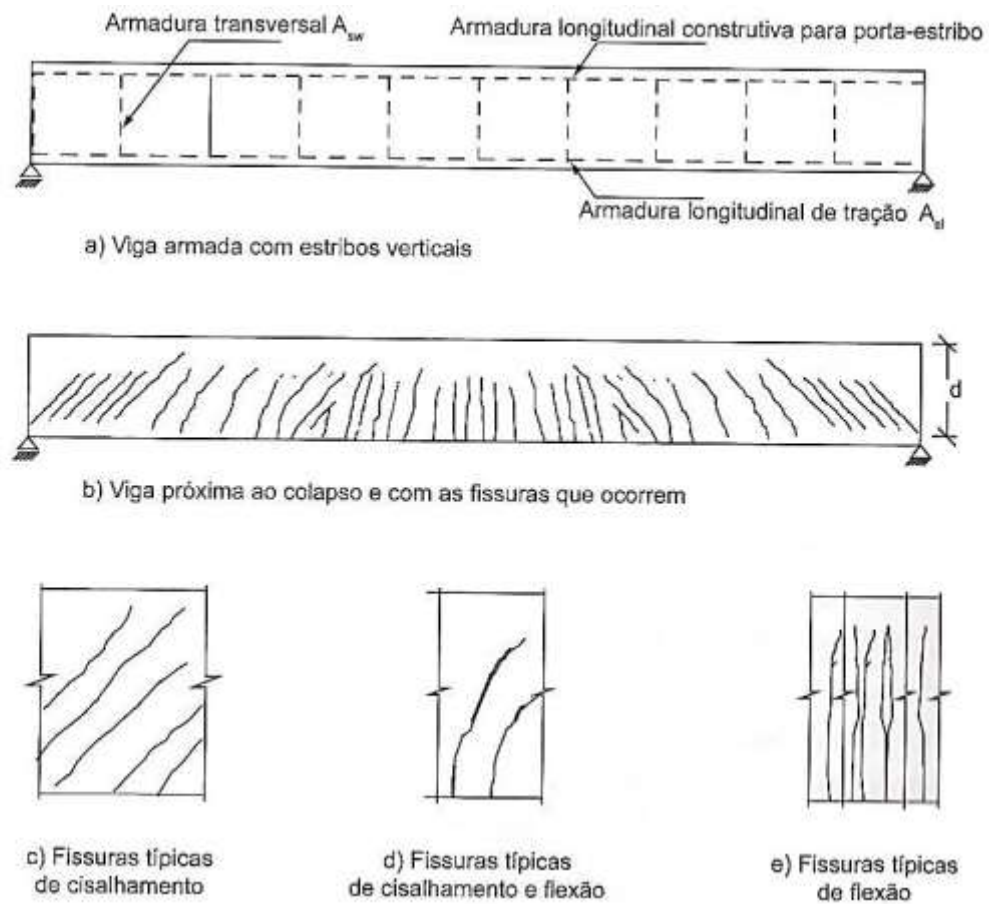
A treliça clássica de Mörsch foi idealizada no início do século XX e, desde então, vem sendo base do dimensionamento das armaduras transversais das vigas de concreto armado. Apesar de algumas pesquisas sugerirem alterações em sua teoria, seu aspecto geral foi mantido e está distante de ser superado, pois o mecanismo resistente desses elementos estruturais pode ser associado ao de treliças (SANTOS, 2006).

O modelo de Mörsch, inicialmente não foi bem aceito, mas com surgimento de técnicas de ensaios de estruturas, comprovou-se que ela poderia ser utilizada, desde que fossem feitas alguns ajustes. A teoria teve reconhecimento mundial e, mesmo após terem ocorrido diversas mudanças referentes aos materiais utilizados, como as resistências e propriedades do concreto e do aço, seus princípios são usados até a atualidade como base de cálculo ao cisalhamento, provocada pela força cortante. A grande vantagem desse modelo é acarretar em resultados satisfatórios referentes à quantidade de armadura transversal no estado-limite último (CARVALHO e FIGUEIREDO FILHO, 2015).

A determinação das armaduras necessárias para resistir às forças cortantes é realizada por meio de uma analogia de treliça usualmente chamada por analogia clássica ou analogia da treliça de Mörsch, na qual, acredita-se que, após a fissura, a resistência à força cortante é balanceada pela combinação de bielas de compressão de concreto e diagonais tracionadas seguindo as trajetórias das tensões principais (FUSCO, 2008; ARAÚJO, 2014).

O modelo de Mörsch faz uma comparação entre uma viga e uma treliça, de banzos paralelos e isostáticos, em que o elemento resistente da viga são as armaduras longitudinais e transversais somadas com o concreto comprimido, cujas intersecções entre esses elementos formam os nós da treliça, conforme a Figura 29 (CARVALHO e FIGUEIREDO FILHO, 2015).

Figura 29 — Viga na iminência da ruptura e os tipos de fissura que podem ocorrer.



Fonte: Carvalho e Figueiredo Filho (2015).

A analogia clássica da treliça baseia-se na superposição de várias treliças isostáticas de elementos simples com banzos paralelos, diagonais comprimidas com inclinação de  $45^\circ$  em relação ao eixo longitudinal da peça, e diagonais tracionadas com inclinação qualquer entre  $45^\circ$  e  $90^\circ$ , que representam uma treliça em malha bem mais próxima da realidade e com alto grau de hiperestaticidade (CARELLI, 2002).

A teoria da treliça de Morsch não tem campo de aplicação limitado ao estágio II e pode ser mantida, até mesmo com maiores fundamentos, no estágio III, proporcionando o cálculo da armadura transversal na ruptura (CARNEIRO, 1963).

Araújo (2014) cita duas treliças de Morsch: a original é chamada de treliça clássica de Morsch, que admitiu que as bielas de compressão estivessem inclinadas a  $45^\circ$  em relação ao eixo da viga, proporcionando uma armadura transversal superior à necessária; e a segunda surgiu em decorrência desse

superdimensionamento, denominada treliça generalizada de Mörsch, a qual possui alterações no modelo original.

As pesquisas modernas demonstraram que em geral a teoria clássica de Morsch, leva a uma armadura transversal superior à necessária, pois, a tensão real atuante na armadura é menor que a obtida pelo modelo de treliça, estando assim, a favor da segurança. Algumas correções ou generalizações foram feitas em relação à teoria clássica da treliça, a fim de eliminar o uso excessivo de armaduras transversais (CARVALHO e FIGUEIREDO FILHO, 2015):

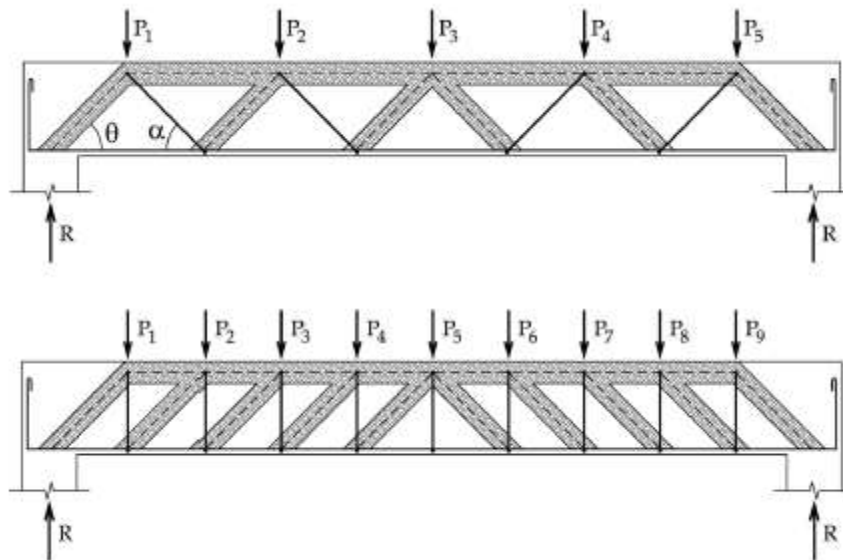
- A treliça é hiperestática (os nós não podem ser considerados como articulações perfeitas);
- Nas regiões mais solicitadas pela força cortante, a inclinação das fissuras e, portanto, das bielas, é menor que os  $45^\circ$  admitidos por Mörsch;
- Parte do esforço cortante é absorvido na zona de concreto comprimido (devido à flexão);
- Os banzos não são paralelos (o banzo superior – comprimido – é inclinado);
- As bielas de concreto estão parcialmente engastadas na ligação com o banzo comprimido, e, assim, são submetidas à flexocompressão, aliviando os montantes ou diagonais tracionados;
- As bielas são mais rígidas que os montantes ou diagonais tracionados, e absorvem uma parcela maior do esforço cortante do que aquela determinada pela treliça clássica;
- A quantidade (taxa) de armadura longitudinal influi no esforço da armadura transversal.

O emprego de ângulo de inclinação dos estribos em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural entre  $45^\circ$  e  $90^\circ$ , resultará em uma força cortante resistente na verificação da integridade das bielas comprimidas, maior do que quando se emprega  $\alpha = 90^\circ$ , chegando ao dobro da força resistente quando o ângulo utilizado for  $45^\circ$ . Todavia, ângulos diferentes de  $90^\circ$  não são usuais, devido às dificuldades de montagem das armaduras e o controle do ângulo de estribos que não sejam verticais (DUARTE et al., 2013).

### 2.3.6 Dimensionamento da armadura transversal

Barbato (2007) afirma que o cálculo da armadura transversal das vigas de concreto armado é concebido assimilando-se a viga de concreto fissurada a uma treliça plana de banzos paralelos (analogia da treliça de Morsch). A alma desta treliça é composta por diagonais comprimidas de concreto (bielas), que formam uma inclinação  $\theta$  em relação ao eixo da viga e diagonais ou montantes tracionados de aço, que tem inclinação  $\alpha$  em relação ao mesmo eixo. A armadura longitudinal da viga e a sua região comprimida formam os banzos paralelos da treliça (Figura 30).

Figura 30 — Assimilação entre a viga de concreto e a treliça.



Fonte: Barbato (2007).

A NBR 6118:2014 (item 17.4.1), prescreve a aplicação de elementos lineares armados ou protendidos, submetidos a forças cortantes, possivelmente combinadas com outros esforços solicitantes. Essas prescrições não se aplicam a elementos de volume como: lajes, vigas paredes e consolos curtos.

A mesma norma propõem dois modelos de calculo que apresentam a resistência da peça assegurada pela verificação da compressão diagonal do concreto e pelo cálculo da armadura transversal, de modo que cada modelo apresenta cálculos distintos. A norma diferencia os dois modelos da seguinte forma:

a) *Modelo de Cálculo I*: é o modelo mais usual em disciplinas de concreto armado, por ser um simplificado. Apresenta a parcela de esforço cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça constante

(ZORZAN, 2015). Adota as diagonais de compressão inclinadas de  $\theta = 45^\circ$  em relação ao eixo do elemento estrutural e trata a parcela complementar  $V_c$  como um valor constante, independente de  $V_{sd}$ , não sofrendo redução com o aumento do esforço cortante de cálculo.

*b) Modelo de Cálculo II:* apresenta a parcela de esforço cortante absorvida por mecanismos complementares ao de treliça, inferior em relação ao modelo I (ZORZAN, 2015). Admite-se que as diagonais de compressão tenham inclinação  $\theta=45^\circ$  em relação ao eixo do elemento estrutural, podendo variar livremente no intervalo entre  $30^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ . Neste caso, considera-se que a parcela complementar  $V_c$  sofra redução com o aumento de  $V_{sd}$ .

Neste trabalho optou-se em utilizar o modelo de cálculo I, por ser o mais simples. Apesar de a norma permitir a variação do ângulo  $\alpha$  de inclinação dos estribos em relação ao eixo longitudinal do elemento estrutural entre  $45^\circ$  e  $90^\circ$ , foram utilizados a inclinação de  $90^\circ$ , por ser o mais usual em obras (DUARTE et al., 2013).

### 2.3.7 Equacionamento para armadura transversal (modelo de cálculo I)

Conhecendo o diagrama de esforços solicitantes, a classe do concreto, a categoria do aço da armadura e as dimensões da seção transversal, determina-se a armadura transversal e seu espaçamento para que uma viga de concreto armado de seção transversal retangular resista ao esforço cortante solicitado.

Para a NBR 6118:2014 (item 17.4.2.1), a resistência da peça, em uma determinada seção transversal, poderá ser considerada satisfatória quando forem verificadas as seguintes situações, para estado-limite último:

$$V_{Sd} \leq V_{Rd2} \quad (39)$$

$$V_{Sd} \leq V_{Rd3} = V_c + V_{sw} \quad (40)$$

*a) Verificação das tensões de compressão nas bielas (compressão diagonal do concreto)*

$$V_{Sd} \leq V_{Rd2} \quad (39)$$

Segundo Carvalho e Figueiredo Filho (2015), essas verificações podem ser feitas em função das tensões tangenciais solicitantes de cálculo e resistente (última), dividindo as forças cortantes das equações acima por  $b_w \cdot d$ , tem-se:



$$\frac{V_{Sd}}{b_w \cdot d} \leq \frac{V_{Rd2}}{b_w \cdot d} \rightarrow \tau_{Sd} \leq \tau_{Rd2} \quad (41)$$

Em que:

$$\tau_{Sd} = \frac{V_k \cdot \gamma_f}{b_w \cdot d} \quad (42)$$

$$\tau_{Rd2} = 0,27 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \cdot b_w \cdot d \quad (43)$$

Onde:

$$\alpha_{v2} = \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \quad (44)$$

Sendo  $f_{ck}$  expresso em MPa.

### *b) Cálculo da armadura transversal*

Para o cálculo da armadura transversal, Carvalho e Figueiredo Filho (2015) afirmam que a parcela da tensão ( $\tau_{SW}$ ) a ser absorvida pela armadura, a partir da Equação 40, pode ser escrita por:

$$\tau_{SW} = \tau_{Rd3} - \tau_c \quad (45)$$

Sendo que a tensão resistente de cálculo  $\tau_{Rd3}$  deve ser no mínimo, igual à tensão solicitante de cálculo ( $\tau_{Rd3} = \tau_{Sd}$ ), e assim:

$$\tau_{SW} = \tau_{Sd} - \tau_c \quad (46)$$

Carvalho e Figueiredo Filho (2015) salientam que a parcela da força cortante a ser resistida por armadura transversal é a diferença entre a força cortante solicitante de cálculo e a parcela de força cortante absorvida por mecanismos complementares aos da treliça, ou seja, a parcela resistida pelo concreto íntegro entre as fissuras. O valor de  $\tau_c$  é obtido para diversas situações de solicitações; no caso de flexão simples e flexotração com a linha neutra cortando a seção, vale:

$$\tau_c = 0,6 \cdot f_{ctd} \quad (47)$$

Em que:

$$f_{ctd} = 0,15 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (48)$$

Sendo  $f_{ck}$  expresso em MPa.

A expressão da taxa geométrica de armadura transversal, para os casos de estribos verticais, inclinados a  $\alpha = 90^\circ$ , que é o mais empregado, é dada por (CARVALHO e FIGUEIREDO FILHO, 2015):

$$\rho_{sw,90} = \frac{1,11 \cdot \tau_{sw}}{f_{ywd}} \quad (49)$$

c) *Armadura transversal mínima*

Segundo Santos (2006), nos elementos lineares fletidos submetidos à força cortante, devem estar providos de uma taxa geométrica de armadura transversal mínima, que é dada por:

$$\rho_{sw,90 \min} = \frac{0,2 \cdot f_{ctm}}{f_{ywk}} \quad (50)$$

Em que:

$$f_{ctm} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (51)$$

Sendo  $f_{ck}$  expresso em MPa.

d) *Espaçamento longitudinal entre estribos*

Conforme a NBR 6118:2014 (item 17.4.2.2), a parcela de esforço cortante a ser resistida pelos estribos verticais em certa seção do elemento, é dada por:

$$V_{sw} = \left( \frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd} \quad (52)$$

Deixando em função das tensões tangenciais e pondo o espaçamento (s) em evidência, tem-se:

$$\frac{V_{sw}}{b_w \cdot d} = \frac{\left( \frac{A_{sw}}{s} \right) \cdot 0,9 \cdot d \cdot f_{ywd}}{b_w \cdot d} \rightarrow \tau_{sw} = \frac{A_{sw} \cdot 0,9 \cdot f_{ywd}}{b_w \cdot s} \rightarrow \quad (53)$$

$$s = \frac{A_{sw}}{\rho_{sw,90} \cdot b_w} \quad (54)$$

Como são utilizado estribos de dois ramos, multiplica o  $A_{sw}$  por dois, obtendo-se:

$$s = \frac{2 \cdot A_{sw}}{\rho_{sw,90} \cdot b_w} \quad (55)$$

Onde:

$$A_{sw} = \pi \cdot \frac{\phi_e^2}{4} \quad (56)$$

No entanto, antes de encontrar o espaçamento dos estribos, deve ser comparado a taxa de armadura transversal ( $\rho_{sw,90}$ ) com a taxa mínima ( $\rho_{sw,90 \min}$ ), para obter a seguinte verificação:

- Se  $\rho_{sw,90} \geq \rho_{sw,90 \text{ min}}$ : deve-se utilizar a taxa de armadura transversal ( $\rho_{sw,90}$ ) na Equação 55;
- Se  $\rho_{sw,90} \leq \rho_{sw,90 \text{ min}}$ : deve-se utilizar a taxa de armadura transversal mínima ( $\rho_{sw,90 \text{ min}}$ ) na Equação 55.

### 2.3.8 Exigências normativas para o cálculo de armaduras transversais

A NBR 6118:2014 recomenda algumas exigências para um dimensionamento adequado de armadura transversal de vigas de concreto armado, as quais são:

a) Diâmetro do estribo:  $5,0\text{mm} \leq \varnothing_e \leq b_w/10$

b) Espaçamento máximo dos estribos:

- se  $V_d \leq 0,67 V_{Rd2}$ , então  $s_{\text{max}} = 0,6 \cdot d \leq 30 \text{ cm}$  (57)

- se  $V_d > 0,67 V_{Rd2}$ , então  $s_{\text{max}} = 0,3 \cdot d \leq 20 \text{ cm}$  (58)

c) Distância máxima entre ramos dos estribos:

- se  $V_d \leq 0,20 \cdot V_{Rd2}$ , então  $s_{t,\text{max}} = 0,6 \cdot d \leq 80 \text{ cm}$  (59)

- se  $V_d > 0,20 \cdot V_{Rd2}$ , então  $s_{t,\text{max}} = 0,6 \cdot d \leq 35 \text{ cm}$  (60)

d) Porcentagem mínima de armadura:  $\rho_{sw,90 \text{ min}} = \frac{0,2 \cdot f_{ctm}}{f_{ywk}}$  (50)

e) Tensão nas barras da armadura:  $f_{yd} \leq 435 \text{ MPa} = 43,5 \text{ kN/cm}^2$ .

## 2.4 AUTOMATIZAÇÃO COMPUTACIONAL

Esta seção foi feita um apanhado sobre o desenvolvimento das ferramentas computacionais e sua importância na engenharia, dando uma ênfase ao software Scilab.

### 2.4.1 Considerações iniciais

Segundo Guimarães e Lages<sup>4</sup> (1994 apud LOPES, 2004) A automatização de tarefas, cálculos e outros procedimentos é um aspecto importante da sociedade moderna. Na engenharia civil, o desenvolvimento tecnológico tem em alguma parte do seu processo de desenvolvimento elementos fundamentais de

<sup>4</sup> GUIMARÃES, A. M.; LAGES, N. A. C. **Algoritmos e Estruturas de Dados**. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1994.

análise e execução de tarefas feitas seja com extrema rapidez, complexidade, repetição eficiente e precisão. Tais situações são apropriadas para a automatização, ou seja, realizadas por um computador.

Nos últimos anos houve uma evolução das ferramentas computacionais para a resolução de problemas de engenharia. Até a década de 1960, os profissionais de engenharia utilizavam ferramentas como réguas de cálculo e tabelas de logaritmos para elaborar seus projetos. A partir da década de 1970, estes instrumentos foram gradualmente substituídos pelas calculadoras eletrônicas (PAMBOUKIAN et al., 2011).

Segundo os mesmos autores, com o aparecimento e a rápida evolução dos microcomputadores, as calculadoras também estão sendo gradualmente substituídas pelos mesmos. As maiores vantagens do uso do computador em substituição às calculadoras são a rapidez com que os cálculos são efetuados, a precisão destes cálculos e principalmente a capacidade que os computadores têm de executar automaticamente tarefas e cálculos repetitivos poupando tempo e trabalho aos seus usuários. Hoje em dia, dificilmente alguma empresa venha a desenvolver projetos sem o auxílio de computadores, pois isso acarretaria elevação de seus custos e aumento nos prazos de entrega.

#### **2.4.2 Algoritmo e linguagem de programação**

Nas últimas décadas houve um processo de desenvolvimento simultâneo e interativo de máquinas (hardware) e dos elementos que gerenciam a sua execução automática (software). A parcela embrionária mais elementar de execução de tarefas é o que se chama de algoritmo (LOPES, 2004).

O algoritmo é a construção de uma representação lógica, o qual recebe um ou mais dados de entrada e produz um ou mais dados de saída. Essa representação lógica é fundamental para o desenvolvimento de softwares. Assim, programar é basicamente o ato de construir algoritmos (LOPES, 2004; MADEIRA, 2006).

Segundo Lauer (2008), uma linguagem de programação é um método padronizado para expressar instruções para um computador, as quais um conjunto de regras sintáticas e semânticas são usadas para definir um programa de computador. A linguagem de programação permite que o programador especifique precisamente quais dados um computador vai trabalhar, como estes dados serão

armazenados ou transmitidos e quais ações devem ser tomadas sob determinadas situações.

### 2.4.3 Etapas da criação de um algoritmo

De acordo com Teixeira M. (2010), a solução de problemas é uma atividade criativa que não pode ser sistematizada. É fundamental entender que para a solução de problemas não existe um método universal, isso vai depender do tipo de problema e variar de programador para programador, e ainda assim tal atividade continuará exigindo dele criatividade, persistência, atenção a detalhes e conhecimento do problema.

Para a resolução de problemas é recomendado passar pelas seguintes etapas (TEIXEIRA, M., 2010):

- *Conhecer o problema*: Definição do problema;
- *Estabelecer um plano de resolução*: Realização de um estudo da situação atual e verificação de qual(is) a(s) forma(s) de resolver o problema (elaboração do algoritmo);
- *Executar o plano de resolução*: Terminada a fase de estudo, utilizar uma linguagem de programação para escrever o programa que deverá a princípio, resolver o problema;
- *Verificar o resultado*: Análise junto aos usuários se o problema foi resolvido. Se a solução não foi encontrada, deverá ser retornado para a fase de estudo para descobrir onde está a falha.

### 2.4.4 História do Scilab

A primeira versão do Scilab veio na década de 80 e era chamada de Blaise, que basicamente era um CACSD (Desenho de Sistemas de Controle auxiliado por Computador). O Blaise foi um software de simulação numérica desenvolvido por François Delebecque e Serge Steer no IRIA (Instituto Francês para Pesquisa em computação e Controle). Seu principal objetivo era dispor uma ferramenta de controle automático que auxiliasse pesquisadores a desenvolverem seus próprios softwares de análise numérica semelhante ao Matlab. Em 1984, o projeto Blaise se tornou Basile e foi distribuído por cinco anos pela Simulog (OLIVEIRA, A. et al., 2016).

Conforme os mesmos autores, no início da década de 90, o nome do software foi alterado para Scilab e foi desenvolvida pelo Grupo Scilab da INRIA (Instituto Nacional Francês para Pesquisa em ciência da computação e Controle) e decidiram distribuí-lo gratuitamente. Com o crescimento de números de usuários trabalhando na indústria e na área acadêmica, a INRIA fundou a companhia Scilab Consortium juntamente com outras companhias e organizações acadêmicas no início de 2003, com intuito de gerenciar, desenvolver, manter e dar suporte a seus usuários. Em sua segunda fase a Scilab Consortium integrou o Digiteo research network em 2008 com o objetivo de aprimorar o ambiente e sua interface gráfica. E em seu último momento, foi fundada em 2010 a companhia Scilab Enterprises. E atualmente o Scilab pode ser instalado nos principais sistemas operacionais disponíveis no mercado como: Windows, Linux e Mac OS-X.

#### **2.4.5 Software Scilab**

O Scilab – iniciais em inglês para **Scientific Laboratory**, é um software para ser aplicado em ambientes de cálculos numéricos. É uma ferramenta de alto desempenho, utilizado em situações que requeiram soluções baseadas em complexos cálculos numéricos, sendo manipulada interativamente ou através de programação (LEITE, 2009). O Scilab faz parte de um grupo de softwares que simula ambiente de computação numérica, como o MatLab, Octave, Maple, etc. A única diferença é que o Scilab é gratuito.

Segundo Barreto (2008), o Scilab admite vários tipos de dados e é baseado basicamente na manipulação de vetores e matrizes. Possui uma vasta coleção de algoritmos que podem ser utilizados para efetuar cálculos complexos e traçar gráficos, com comandos simples e curtos. Pelo fato de ser uma linguagem de programação, permite que os usuários desenvolvam seus próprios comandos e criem seus próprios programas, em sua própria linguagem, em linguagem C ou FORTRAN.

O Scilab possui inúmeros comandos que são pequenos programas chamados “functions” (funções), agrupados, de acordo com a afinidade dos algoritmos que executam. Possui também grande número de bibliotecas (toolboxes) que englobam funções gráficas, integração numérica, álgebra linear, otimização e outras. Existem bibliotecas específicas para engenharia, como controle e

processamento de sinais, as quais podem ser expandidas adicionando-se bibliotecas disponíveis na Internet (BARRETO, 2008; SILVA e CUNHA, 2006).

Apesar de simples, o Scilab possui uma linguagem de programação e disponibiliza a maioria das estruturas das linguagens de programação convencionais. A diferença principal é que, na programação Scilab, não há a necessidade da declaração prévia dos tipos das variáveis que serão utilizadas ao longo do programa (SAINT-CLAIR et al., 2009; SILVA e CUNHA, 2006).

Saint-Clair et al. (2009) ressalta que deve-se ser levado em consideração que o Scilab é um interpretador de comandos. Os programas escritos na linguagem Scilab normalmente são executados em um tempo maior que os programas semelhantes escritos em linguagens compiláveis.

### 3 METODOLOGIA

O objetivo deste capítulo é apresentar a metodologia utilizada no desenvolvimento do trabalho, desde a revisão bibliográfica até os roteiros de cálculo para dimensionamento de vigas retangulares de concreto armado, estas vigas são avaliadas segundo critérios e parâmetros de dimensionamento conforme a NBR 6118:2014. Para realização deste trabalho foi utilizado como base o programa Microsoft Office Excel e em seguida foi utilizado o software Scilab (versão 5.2.1).

#### 3.1 UNIVERSO DA PESQUISA

O Microsoft Office Excel foi utilizado para a realização dos cálculos e estudo, como forma avaliar e validar a formulação (Figura 31 e 32). Por ser um programa simples na manipulação dos dados, foram utilizadas fórmulas, inserindo funções em suas células, gerando uma interface inicial dos dados de entrada e de saída com clareza na exposição dos resultados.

Figura 31 — Dados de entrada da viga no Excel.

The screenshot shows an Excel spreadsheet with the following content:

**DADOS DA VIGA**

bw (cm)	
h (cm)	
d (cm)	
c (cm)	
fc <sub>k</sub> (MPa)	
CA 1 (kN/cm <sup>2</sup> )	
Ø <sub>e</sub> (mm)	
CA 2 (kN/cm <sup>2</sup> )	

**ANÁLISE DA VIGA**

M <sub>k</sub> (kN.m)	
V <sub>k</sub> (kN)	

**LEGENDA (ENTRADA)**

bw	Base da viga
h	Altura da viga
c	Cobrimento de concreto
d	Altura útil
CA 1	Aço da armadura longitudinal
fc <sub>k</sub>	Resistência a compressão do concreto
Ø <sub>e</sub>	Diâmetro do estribo
CA 2	Aço do estribo
M <sub>k</sub>	Momento fletor
V <sub>k</sub>	Força cortante
Preencher somente células nesta cor	

The diagram shows a rectangular beam with width  $b$  and height  $h$ . The effective depth is  $d$ , and the concrete cover is  $c$ . The top reinforcement is  $As'$  and the bottom reinforcement is  $As$ . The stirrup diameter is  $\varnothing_e$ .

Fonte: Acervo do autor (2016).



Figura 32 — Dados de saída da viga (resultado) no Excel.

RESULTADOS		ARM. LONGITUDINAL	LEGENDA (SAÍDA)
As (cm <sup>2</sup> )			A <sub>s</sub> Área de aço tracionada
A's (cm <sup>2</sup> )			A's Área de aço comprimida
Domínio			LN Profundidade da linha neutra
Ductilidade			K <sub>x</sub> Parâmetro para o domínio
LN (cm)			M <sub>d</sub> Momento fletor de cálculo
K <sub>x</sub>			M <sub>lim</sub> Momento resistente de cálculo
M <sub>d</sub> (kN.m)			As <sub>máx</sub> Área de aço máxima
M <sub>lim</sub> (kN.m)			As <sub>mín</sub> Área de aço mínima
Taxa de arm.			
As <sub>máx</sub> (cm <sup>2</sup> )			
As <sub>mín</sub> (cm <sup>2</sup> )			

Fonte: Acervo do autor (2016).

Em seguida utilizou-se o Scilab para a obtenção de todos os resultados. O Scilab é um software gratuito que possui uma linguagem de programação própria que permite a criação de programas numéricos. Sua linguagem empregada é relativamente simples e facilmente compreendida.

### 3.2 COLETA E ANÁLISE DE DADOS

Este trabalho foi fundamentado em pesquisas publicadas em livros, artigos científicos, monografias de graduação, dissertações de mestrado, teses de doutorado e principalmente na NBR 6118:2014.

Para complemento da pesquisa foram realizados alguns cálculos como exemplos didáticos com o aplicativo para demonstrar seus diferentes resultados a partir da variação dos dados de entrada. Posteriormente foram feitos os cálculos manuais, para comprovar a eficiência da programação, utilizando o método de cálculo indicado por Carvalho e Figueiredo Filho (2015), buscando atender os requisitos impostos pela NBR 6118:2014.

Seis exemplos foram analisados a fim de avaliar todas as situações possíveis. Em que a resistência a compressão do concreto foi variada de 20 a 60 MPa, podendo chegar até 90 MPa, atendendo os requisitos da NBR 6118:2014. Foram explorados os três tipos de aço comerciais, o CA25, CA50 e CA60, para armadura longitudinal e transversal, conforme a Tabela 5.

Tabela 5 — Dados de entrada dos exemplos estudados.

Viga	$b_w$ (cm)	$h$ (cm)	$d$ (cm)	$c$ (cm)	$f_{ck}$ (MPa)	CA 1 (kN/cm <sup>2</sup> )	$\varnothing_e$ (mm)	CA 2 (kN/cm <sup>2</sup> )	$M_k$ (kN.m)	$V_k$ (kN)
1	15,0	50,0	45,0	2,5	25	50	5,0	50	48,0	96,0
2	15,0	50,0	45,0	2,5	60	60	5,0	25	60,0	100,0
3	12,0	25,0	22,5	2,0	35	25	6,3	50	20,0	35,0
4	12,0	25,0	22,5	2,0	50	50	5,0	60	35,0	45,0
5	30,0	90,0	81,0	2,5	20	50	10,0	50	650,0	500,0
6	30,0	70,0	63,0	2,5	55	50	9,5	60	1045	500,0

Fonte: Acervo do autor (2016).

### 3.3 ROTEIRO DE CÁLCULO PARA O DIMENSIONAMENTO DE VIGAS RETANGULARES

Para o dimensionamento de vigas, foi utilizado o método dos estados-limites, que consiste na verificação da resistência dos elementos à ruptura, as quais a resistência dos seus materiais seja minorada por um coeficiente de ponderação e suas solicitações correspondentes às cargas aplicadas majoradas.

O processo de dimensionamento usual de vigas retangulares em concreto armado pode ser dividido em duas etapas: dimensionamento das armaduras longitudinais e dimensionamento das armaduras transversais.

#### a) Posição da linha neutra

Inicialmente calcula-se a profundidade da linha neutra ( $x$ ), pois quanto mais profunda, menor a ductilidade da viga.

$$x = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 2 \cdot \left( \frac{M_d}{b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd}} \right)}}{\lambda}$$

Por ser uma equação de segundo grau, serão encontrados dois valores para  $x$ . Um destes valores é desprezado, pois estará localizado fora da seção transversal da viga.

#### b) Cálculo de $K_x$

Calcula-se  $K_x$  para determinar em qual domínio deformação se encontra a viga.

$$K_x = \frac{x}{d}$$

c) *Domínios de deformações*

- Domínio para aço CA-25:

$$K_x < 0,259 \rightarrow \text{domínio 2}$$

$$0,259 < K_x < 0,7709 \rightarrow \text{domínio 3}$$

$$0,7709 < K_x < 1,0 \rightarrow \text{domínio 4}$$

- Domínio para aço CA-50:

$$K_x < 0,259 \rightarrow \text{domínio 2}$$

$$0,259 < K_x < 0,6283 \rightarrow \text{domínio 3}$$

$$0,6283 < K_x < 1,0 \rightarrow \text{domínio 4}$$

- Domínio para aço CA-60:

$$K_x < 0,259 \rightarrow \text{domínio 2}$$

$$0,259 < K_x < 0,585 \rightarrow \text{domínio 3}$$

$$0,585 < K_x < 1,0 \rightarrow \text{domínio 4}$$

O domínio 4a e 5 é atingindo quando:

$$d < x < h \rightarrow \text{domínio 4a}$$

$$x > h \rightarrow \text{domínio 5}$$

d) *Momento de cálculo*

$$M_d = 1,4 \cdot M_k$$

e) *Momento fletor resistente de cálculo*

Momento fletor resistente de cálculo é o valor limite do momento fletor em que a viga apresenta característica dúctil, sendo resistida apenas pelas armaduras de tração.

$$M_{lim} = b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \lambda \cdot \left(\frac{x}{d}\right) \cdot d^2 \cdot \left(1 - 0,5 \cdot \lambda \cdot \left(\frac{x}{d}\right)\right)$$

Para uma viga apresentar uma boa ductilidade, deve respeitar os seguintes limites impostas pela NBR 6118:2014:

$$\frac{x}{d} = 0,45, \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

$$\frac{x}{d} = 0,35, \text{ para } 50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$$

Caso o valor de  $M_{lim}$  seja menor que o valor de  $M_d$ , a viga perde sua característica dúctil, e para contornar este problema é necessário o uso de armaduras duplas.

### 3.3.1 Dimensionamento de vigas com armadura simples

Sabendo a posição da linha neutra pode-se calcular a área de aço necessária para que a viga resista às solicitações.

$$A_s = \frac{M_d}{(d - 0,5 \cdot \lambda \cdot x) \cdot f_{yd}}$$

#### a) Cálculo da armadura de tração mínima

Ainda deve-se comparar essa área de armadura para verificar se ela possui o mínimo de aço, utilizando as formulas a seguir:

$$\rho_{min} = \frac{0,078 \cdot f_{ck}^{(2/3)}}{f_{yd}} \quad \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

$$\rho_{min} = \frac{0,5512 \cdot \ln(1+0,11 \cdot f_{ck})}{f_{yd}} \quad \text{para } 50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$$

Essas taxas não devem ser menores que a taxa mínima absoluta imposta pela NBR 6118:2014 que é  $\rho_{min} = 0,15\%$ . Deve-se usar o maior valor para  $\rho_{min}$ , logo área de aço mínima é dada por:

$$A_{s,min} = \rho_{min} \cdot A_c$$

#### b) Taxa de armadura simples

É a porcentagem da área de aço referente à área da seção transversal da viga.

$$\rho = \frac{A_s}{A_c}$$

### 3.3.2 Dimensionamento de vigas com armadura dupla

O processo de dimensionamento de vigas com armadura dupla pode ser dividido em três etapas: uma parte é a parcela que a viga resiste aos esforços trabalhando no limite de ductilidade, a parcela que será resistida pela armadura de tração e a parcela resistida pela armadura de compressão.

#### a) Cálculo do $A_{s1}$

Conhecendo o valor de  $M_{lim}$ , pode-se calcular a área de aço da seção transversal da armadura longitudinal tracionada.

$$A_{s1} = \frac{M_{lim}}{d - 0,5 \left(\frac{x}{d}\right) \cdot d \cdot \lambda \cdot f_{yd}}$$

*b) Cálculo do  $A_s$  para armadura dupla*

Após isso, deve-se calcular a armadura tracionada total ( $A_s$ ).

$$A_s = \frac{M_{lim}}{\left(d - 0,5 \cdot \left(\frac{x}{d}\right) \cdot d \cdot \lambda\right) \cdot f_{yd}} + \frac{M_d - M_{lim}}{(d - d') \cdot f_{yd}}$$

*c) Cálculo do  $A'_s$*

E por fim, deve-se calcular a área de aço da seção transversal resistida pela armadura de compressão.

$$A'_s = \frac{M_d - M_{lim}}{(d - d') \cdot f_{yd}}$$

*d) Cálculo da armadura de tração máxima*

A soma das armaduras de tração e de compressão ( $A_s + A'_s$ ) não pode ser maior que 4% da área de concreto ( $A_c$ ), calculada em região fora da zona de emendas.

$$A_{s,max} = 4\% \cdot A_c$$

*e) Taxa de armadura dupla*

A taxa de armadura dupla é a porcentagem da soma da área de aço da armadura tracionada com a área de aço da armadura de compressão, referente à área da seção transversal da viga.

$$\rho = \frac{A_s + A'_s}{A_c}$$

### 3.3.3 Dimensionamento da armadura transversal

Para o dimensionamento da armadura transversal foi utilizado o modelo de cálculo I da NBR 6118:2014, este modelo divide o dimensionamento a força cortante em duas etapas.

*a) Verificação da compressão diagonal do concreto*

$$\frac{V_k \cdot \gamma_f}{b_w \cdot d} \leq 0,27 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \cdot f_{cd}$$

Quando esta verificação é verdadeira, significa que não há o esmagamento da biela de compressão, podendo dar continuidade aos cálculos. Caso ocorra o esmagamento da biela, deve-se redimensionar a viga, seja aumentando a altura útil, seja aumentando o valor da base, seja aumentando a resistência à compressão do concreto.

#### *b) Cálculo da armadura transversal*

Determina a parcela da tensão da força cortante absorvida pela armadura.

$$\tau_{sw} = \left( \frac{V_k \cdot \gamma_f}{b_w \cdot d} \right) - (0,6 \cdot 0,15 \cdot f_{ck}^{2/3})$$

Devido a armadura transversal da viga formar um ângulo  $\alpha$  igual a  $90^\circ$  com a armadura longitudinal pode-se utilizar essa expressão para se comparar a taxa de armadura transversal com a taxa mínima, utilizando a formula a seguir:

$$\rho_{sw,90} = \frac{1,11 \cdot \tau_{sw}}{f_{ywd}} \geq \frac{0,2 \cdot 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3}}{f_{ywk}}$$

Caso a taxa de armadura transversal seja menor que a taxa mínima deve-se utilizar a taxa de armadura mínima.

E por fim é encontrado o espaçamento entre os estribos:

$$s = \frac{2 \cdot \left( \pi \cdot \frac{\phi_e^2}{4} \right)}{\rho_{sw,90} \cdot b_w}$$

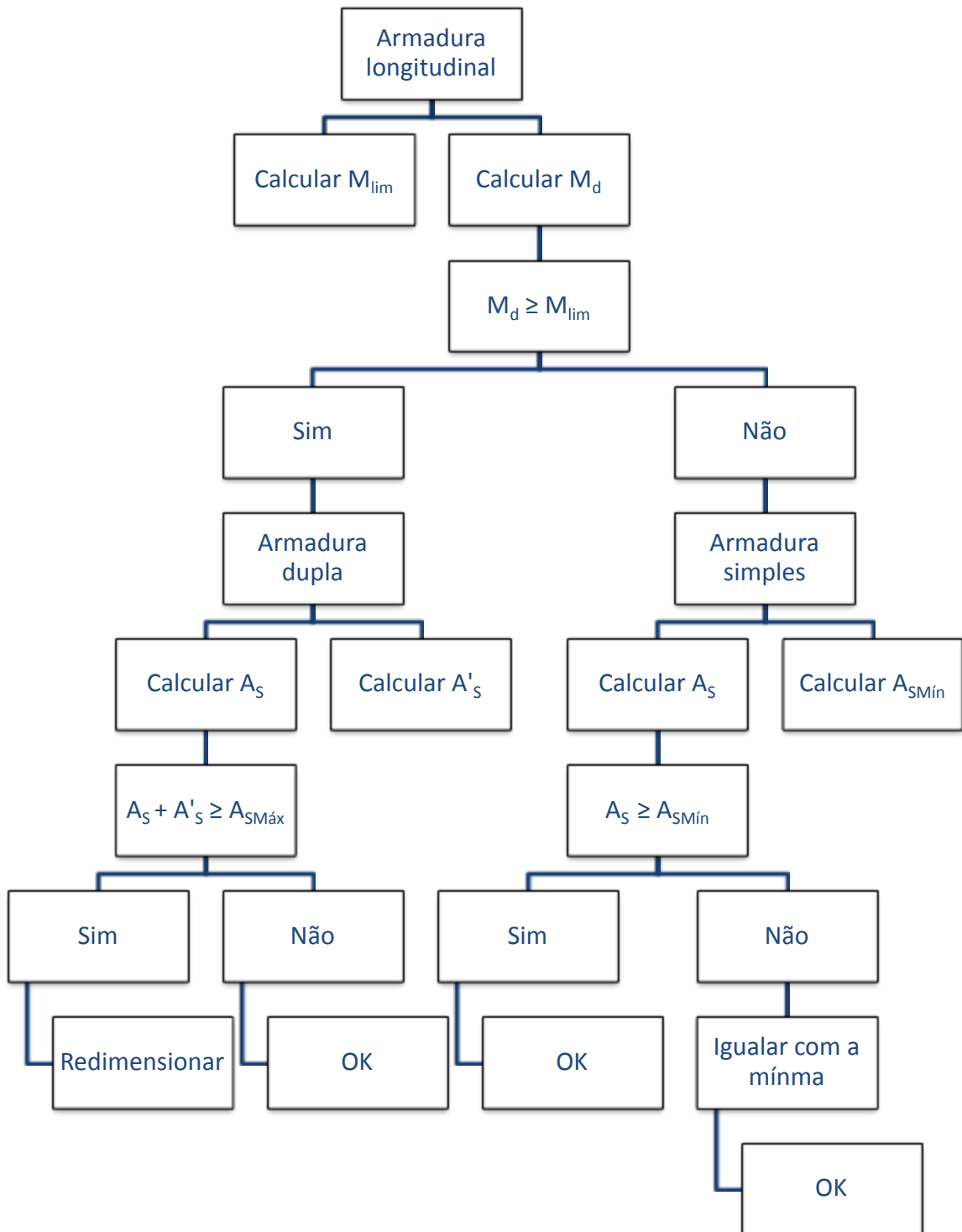
O espaçamento encontrado deverá ainda respeitar o espaçamento máximo entre os estribos que é se  $s_{max} = 0,6 \cdot d \leq 30$  cm para  $V_d \leq 0,67 V_{Rd2}$ , e  $s_{max} = 0,3 \cdot d \leq 20$  cm para  $V_d > 0,67 V_{Rd2}$ . Apesar da NBR 6118:2014 não atribuir um valor para o espaçamento mínimo entre estribos, a mesma salienta que o espaçamento deve ser suficiente para permitir a passagem do vibrador, garantindo um bom adensamento da massa.

### 3.4 LÓGICA UTILIZADA NA PROGRAMAÇÃO

Após o desenvolvimento dos roteiros de cálculo foram desenvolvidos fluxogramas para um melhor entendimento dos algoritmos de programação utilizados para o dimensionamento das vigas (Figura 33 e 34).

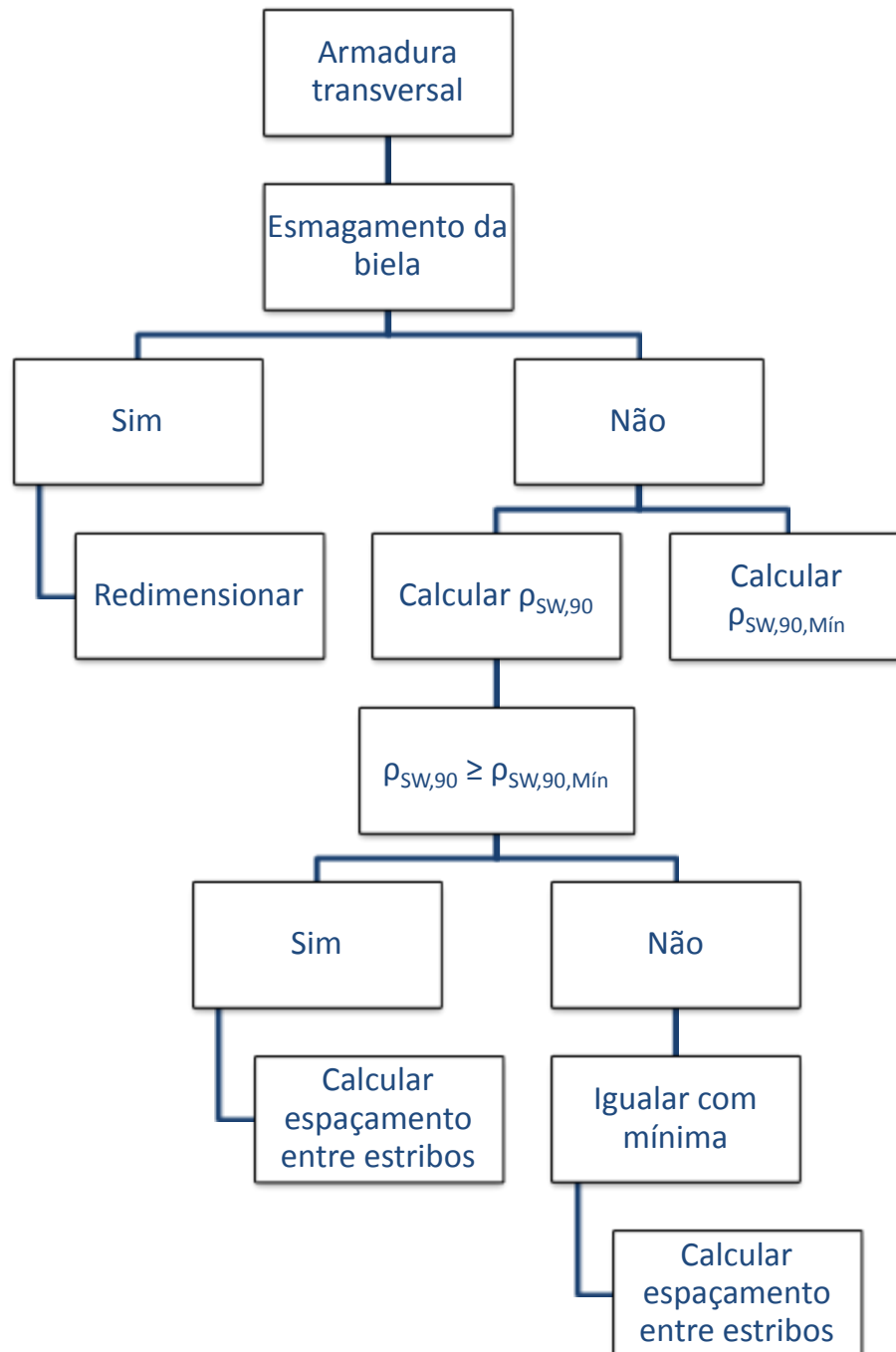
Fluxograma é a técnica para se registrar um processo de forma compacta. Sua finalidade é de tornar possível a compreensão do processo e posterior melhoria, tendo como objetivo representar de forma gráfica as diversas etapas do processo de dimensionamento.

Figura 33 — Fluxograma do algoritmo de programação para armadura longitudinal.



Fonte: Acervo do autor (2016).

Figura 34 — Fluxograma do algoritmo de programação para armadura transversal.



Fonte: Acervo do autor (2016).

Para obter mais detalhes sobre o código de programação utilizado, o mesmo encontra-se no apêndice A.



## 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste capítulo foram feitas as análises dos resultados, mostrando os dados de saída, o roteiro de utilização do programa e alguns erros de segurança.

### 4.1 DADOS DE SAÍDA

Com o propósito de analisar o método e comparar os resultados apresentados, foram selecionadas seis vigas com diferentes seções,  $f_{ck}$ , valores característicos da resistência de escoamento do aço, diâmetro da armadura transversal e esforços solicitantes. Ao alterar essas variáveis, foi possível apresentar três situações possíveis de domínio de deformação, as quais, duas vigas em que a posição da linha neutra se encontra no domínio 2, duas vigas em que a posição da linha neutra se encontra no domínio 3 e por fim duas vigas que a posição da linha neutra se encontra no domínio 4. Os resultados estão apresentados nas Tabelas 6 e 7.

Tabela 6 — Dados de saída dos exemplos estudados.

Viga	$A_s$ (cm <sup>2</sup> )	$A'_s$ (cm <sup>2</sup> )	Domínio	Ductilidade	LN (cm)	$K_x$
1	3,73	-	2	OK	8,90	0,20
2	3,73	-	2	OK	4,84	0,11
3	6,53	-	3	OK	6,96	0,31
4	5,95	-	3	OK	8,87	0,39
5	30,96	6,53	4	NÃO OK	51,80	0,64
6	61,26	22,25	4	NÃO OK	40,38	0,64

Fonte: Acervo do autor (2016).

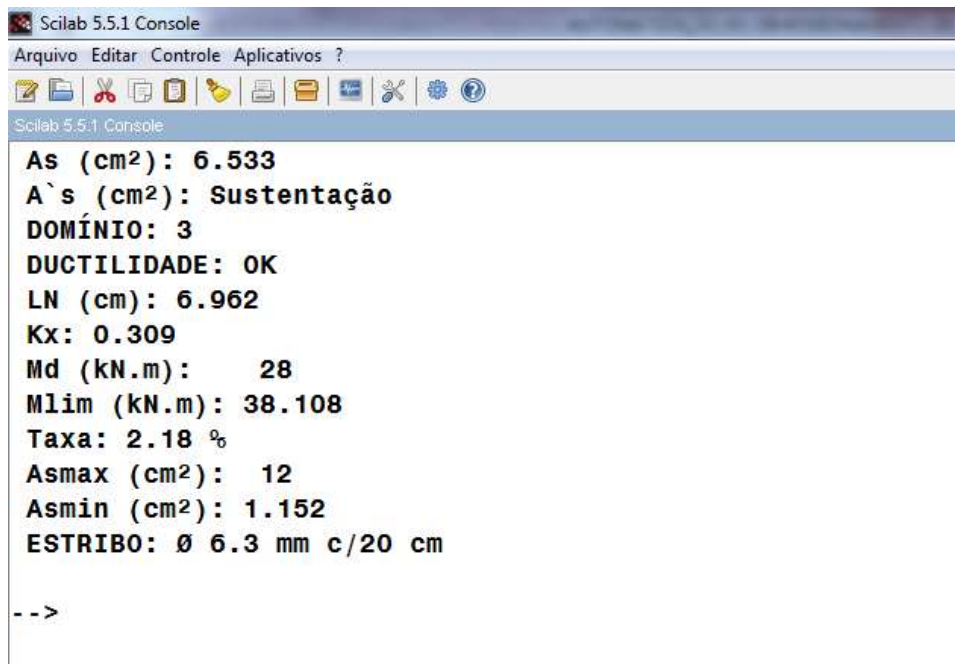
Tabela 7 — Dados de saída dos exemplos estudados (continuação).

Viga	$M_d$ (kN.m)	$M_{lim}$ (kN.m)	Taxa de armadura.	$A_{smáx.}$ (cm <sup>2</sup> )	$A_{smin.}$ (cm <sup>2</sup> )	Estribo
1	67,20	136,10	0,50%	30,00	1,15	Ø 5,0 mm c/ 8,0 cm
2	84,0	246,46	0,50%	30,00	1,61	Ø 5,0 mm c/ 7,0 cm
3	28,0	38,11	2,18%	12,00	1,15	Ø 6,3 mm c/ 20,0 cm
4	49,0	54,44	1,98%	12,00	0,73	Ø 5,0 mm c/ 11,0 cm
5	910,0	705,55	1,39%	108,00	4,05	Ø 10,0 mm c/ 9,0 cm
6	1463,0	921,26	3,98%	84,00	5,20	Ø 9,5 mm c/ 7,0 cm

Fonte: Acervo do autor (2016).

Após realizar os dimensionamentos das vigas indicados na Tabela 5, foi observado que os dados de saída da programação se mostram de forma clara e objetiva, identificando as possíveis situações presentes a cada cálculo. As Figuras 35 e 36 exemplificam a formatação dos dados de saída no Scilab.

Figura 35 — Dados de Saída da viga 3.



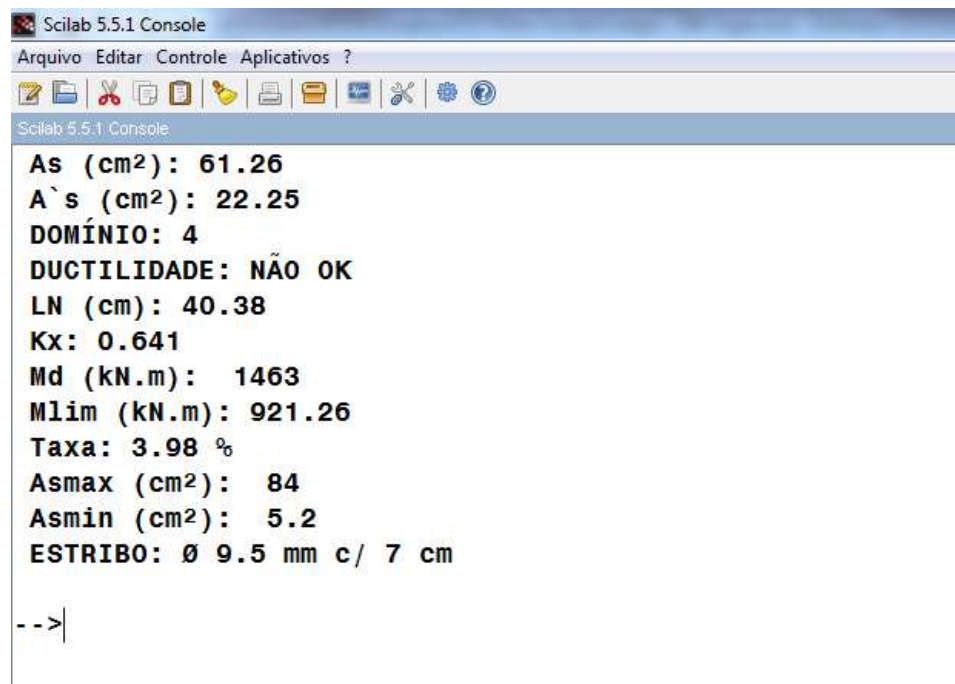
```

Scilab 5.5.1 Console
Arquivo Editar Controle Aplicativos ?
Scilab 5.5.1 Console
As (cm2): 6.533
A`s (cm2): Sustentação
DOMÍNIO: 3
DUCTILIDADE: OK
LN (cm): 6.962
Kx: 0.309
Md (kN.m): 28
Mlim (kN.m): 38.108
Taxa: 2.18 %
Asmax (cm2): 12
Asmin (cm2): 1.152
ESTRIBO: Ø 6.3 mm c/20 cm
-->

```

Fonte: Software Scilab.

Figura 36 — Dados de Saída da viga 6.



```

Scilab 5.5.1 Console
Arquivo Editar Controle Aplicativos ?
Scilab 5.5.1 Console
As (cm2): 61.26
A`s (cm2): 22.25
DOMÍNIO: 4
DUCTILIDADE: NÃO OK
LN (cm): 40.38
Kx: 0.641
Md (kN.m): 1463
Mlim (kN.m): 921.26
Taxa: 3.98 %
Asmax (cm2): 84
Asmin (cm2): 5.2
ESTRIBO: Ø 9.5 mm c/ 7 cm
-->

```

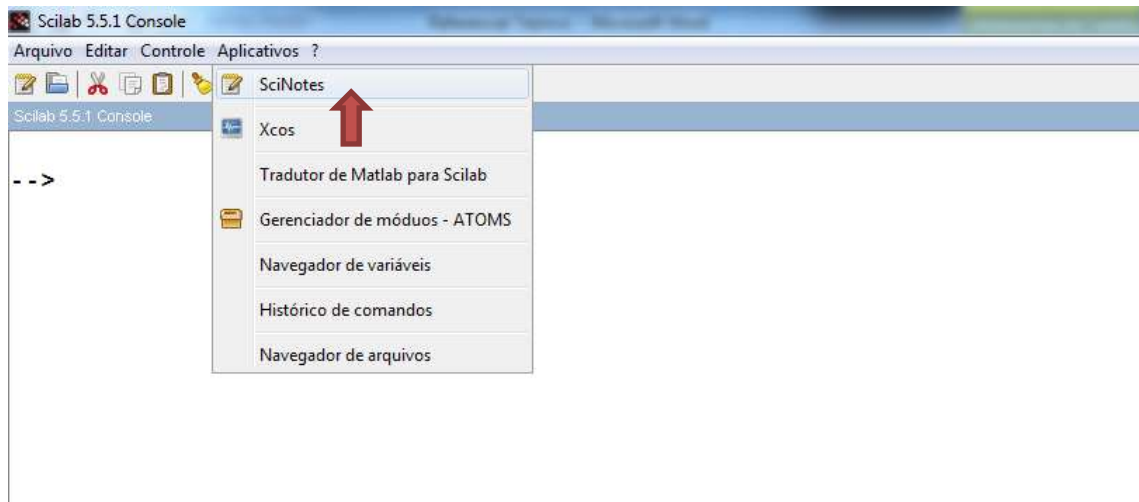
Fonte: Software Scilab.

Foi realizado o dimensionamento das vigas de forma manual (apêndice B), a fim de comprovar os resultados e a eficácia da programação.

#### 4.2 ROTEIRO PARA UTILIZAÇÃO DA PROGRAMAÇÃO NO SCILAB

Inicialmente abre-se o Scilab, em aplicativos, seleciona sciNotes (Figura 37).

Figura 37 —Tela inicial do Scilab.



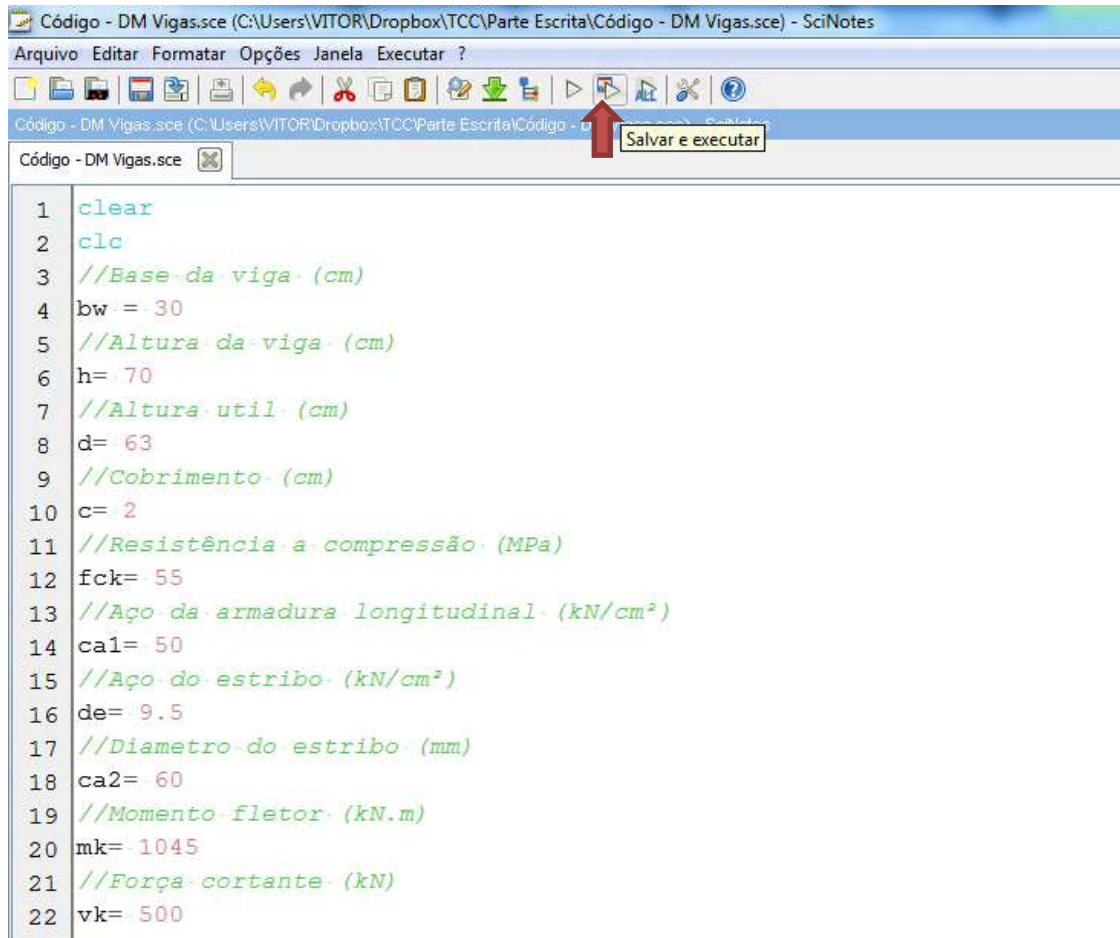
Fonte: Software Scilab.

Estando no sciNotes, abre-se a programação e digita o valores de entrada, a qual é composta por dez dados de entrada na seguinte ordem:

- a) bw (cm)
- b) h (cm)
- c) d (cm)
- d) c (cm)
- e) fck (MPa)
- f) ca1 (kN/cm<sup>2</sup>)
- g) de (mm)
- h) ca2 (kN/cm<sup>2</sup>)
- i) mk (kN.m)
- j) vk (kN)

Ao digitar os valores, clica no botão salvar e executar (Figura 38).

Figura 38 — Página do sciNotes em destaque o botão salvar e executar.



Fonte: Software Scilab.

Com isso, volta para a página inicial do Scilab e verifica o resultado (Figura 35 e 36). Caso o usuário preencha os dados de entrada corretamente a programação irá gerar doze dados de saída na seguinte ordem:

- a)  $A_s$  (cm<sup>2</sup>)
- b)  $A'_s$  (cm<sup>2</sup>)
- c) Domínio:
- d) Ductilidade:
- e) LN (cm)
- f)  $K_x$
- g)  $M_d$  (kN.m)
- h)  $M_{lim}$  (kN.m)
- i) Taxa (%)
- j)  $A_{s,máx}$  (cm<sup>2</sup>)
- k)  $A_{s,min}$  (cm<sup>2</sup>)

I) ESTRIBO:

Para realizar um novo cálculo, o usuário deve retornar para o sciNotes, digita os novo valores e repete todo o processo.

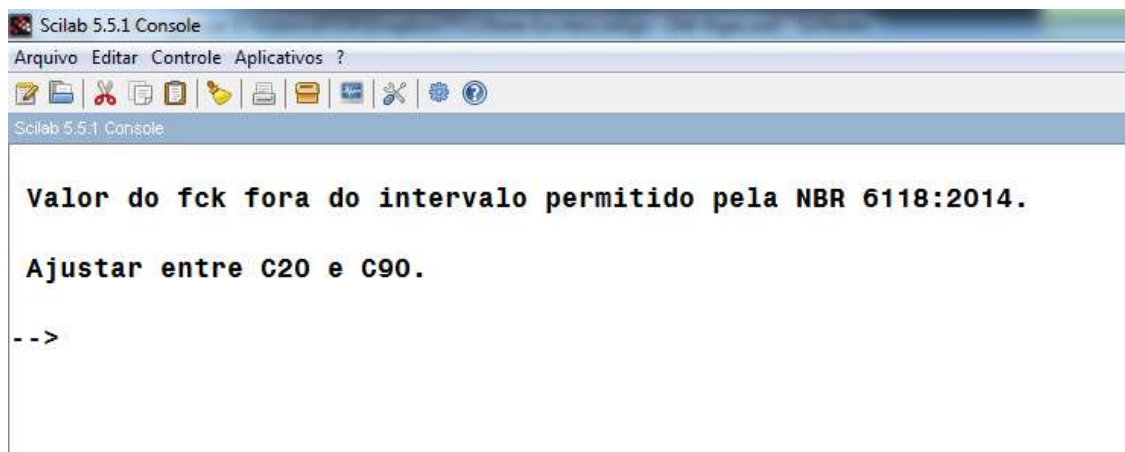
#### 4.3 ERROS DE SEGURANÇA

Ao preencher esses dados, o usuário pode se deparar com algumas situações que impeçam a programação de concluir os cálculos, pois estão completamente vinculados a NBR 6118:2014. Desta maneira, ao impedir o avanço, a programação permite dimensionar vigas mais seguras, identificando erros e propondo uma forma de corrigi-lo.

Os erros possíveis são:

a)  $f_{ck}$  fora do intervalo

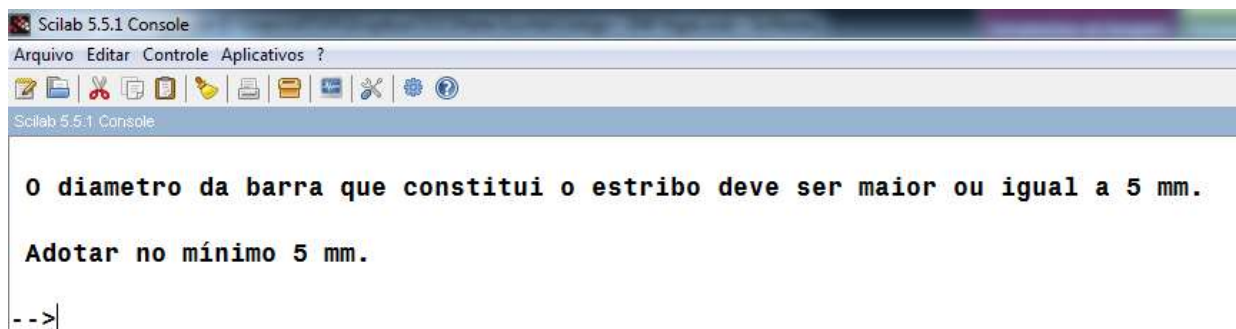
Figura 39 — Erro do  $f_{ck}$ .



Fonte: Software Scilab.

b) Diâmetro do estribo menor que 5,0mm

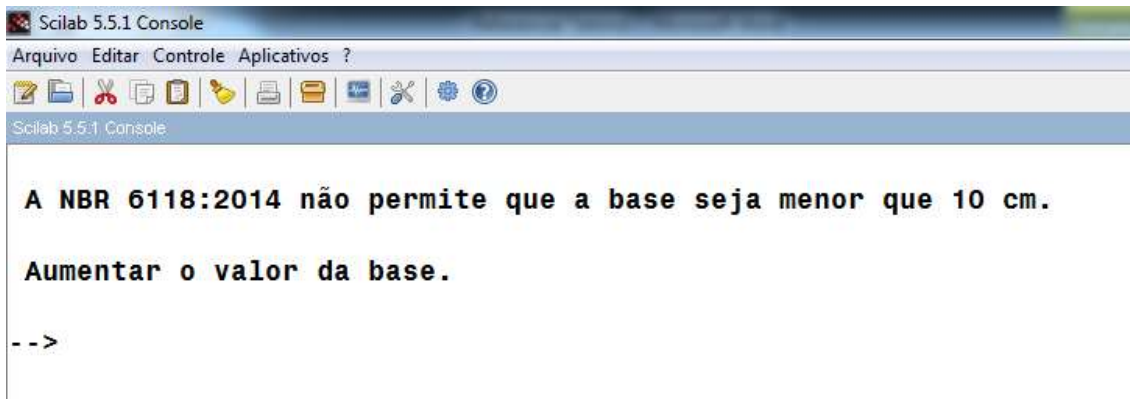
Figura 40 — Erro do diâmetro do estribo.



Fonte: Software Scilab.

c) *Base menor que 10 cm*

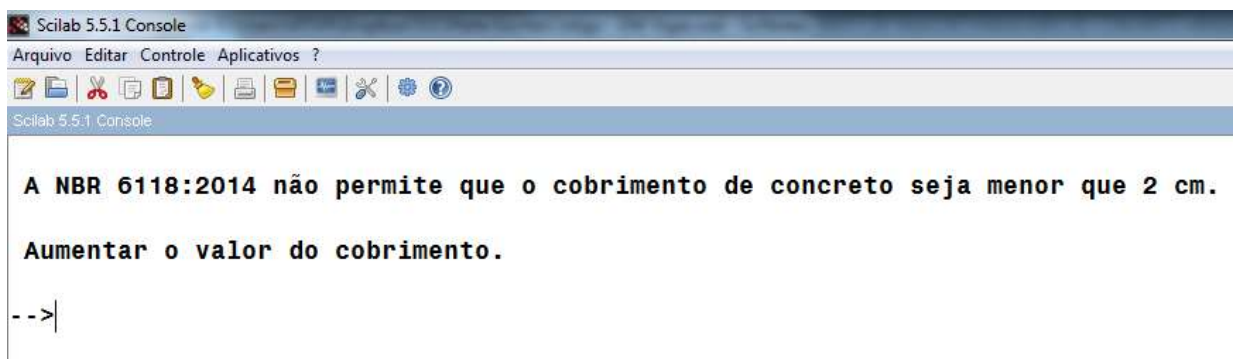
Figura 41 — Erro da base.



Fonte: Software Scilab.

d) *Cobrimento menor que 2 cm*

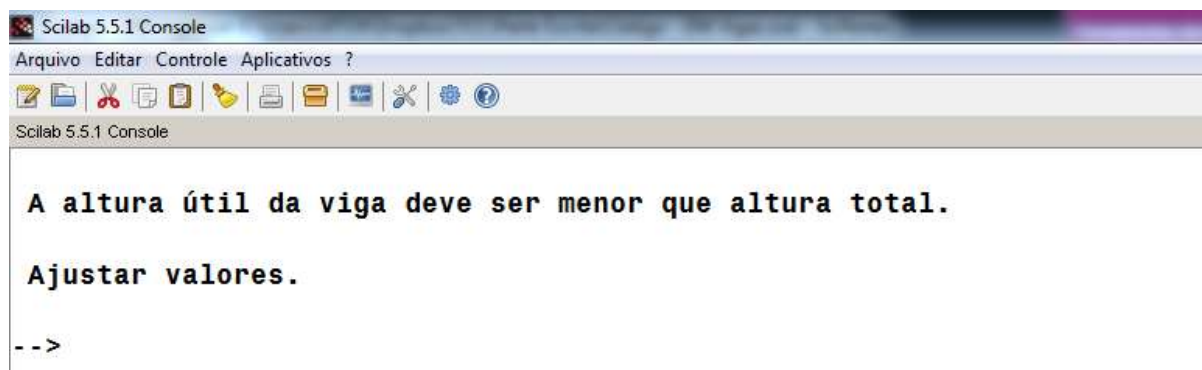
Figura 42 — Erro do cobrimento.



Fonte: Software Scilab.

e) *Altura útil menor que a altura total da viga*

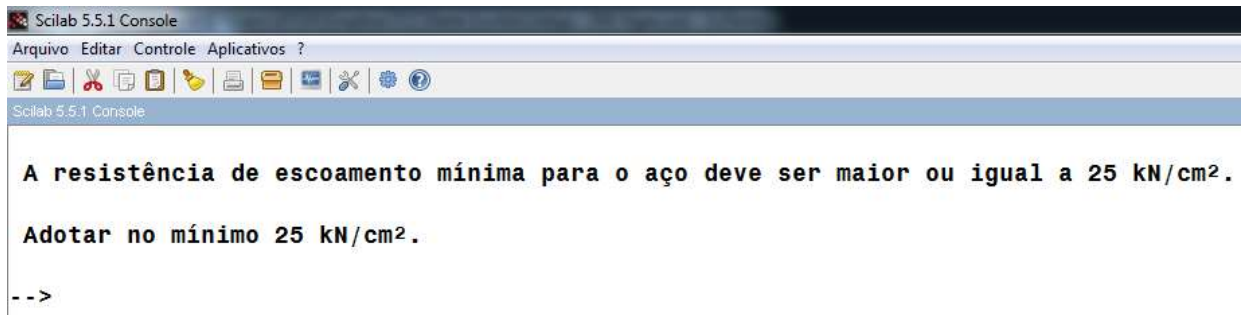
Figura 43 — Erro da altura útil e total.



Fonte: Software Scilab.

f) Resistência do escoamento do aço menor que  $25 \text{ kN/cm}^2$

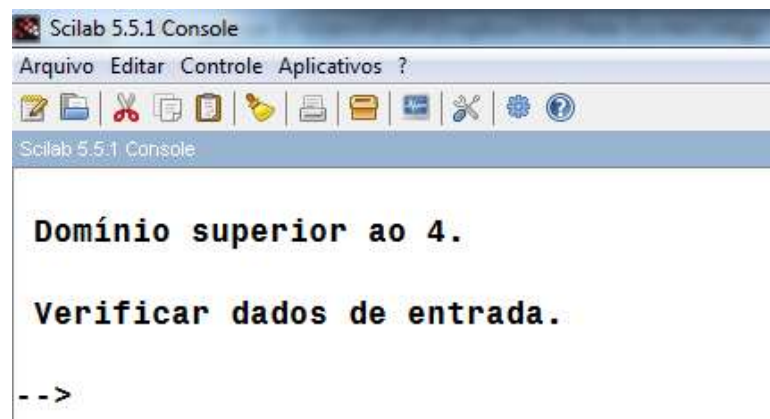
Figura 44 — Erro da resistência do escoamento do aço.



Fonte: Software Scilab.

g) Domínio superior ao 4

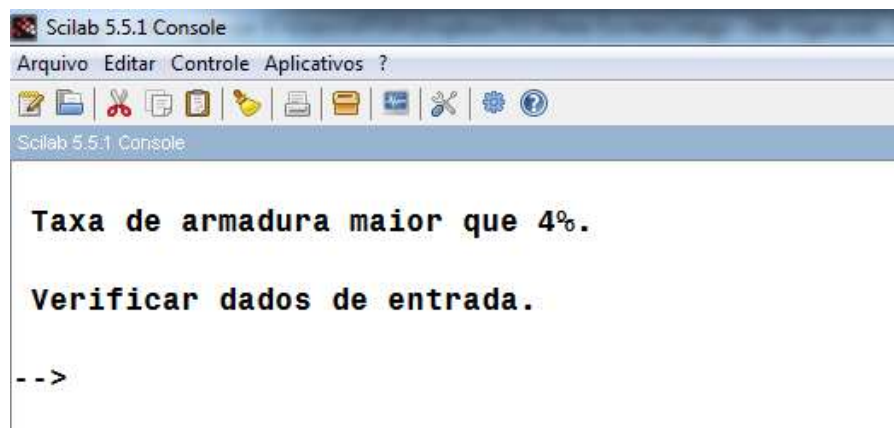
Figura 45 — Erro do domínio.



Fonte: Software Scilab.

h) Taxa de armadura maior que 4%

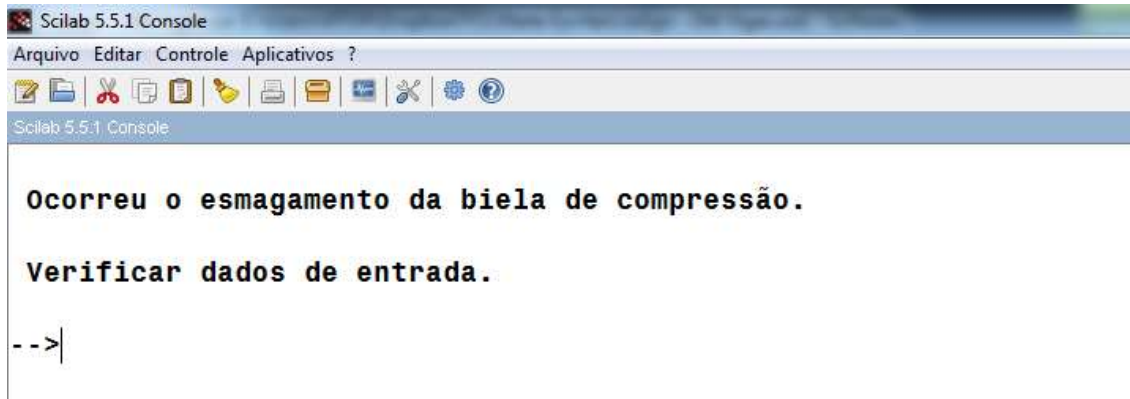
Figura 46 — Erro da taxa de armadura.



Fonte: Software Scilab.

*i) Esmagamento da biela de compressão*

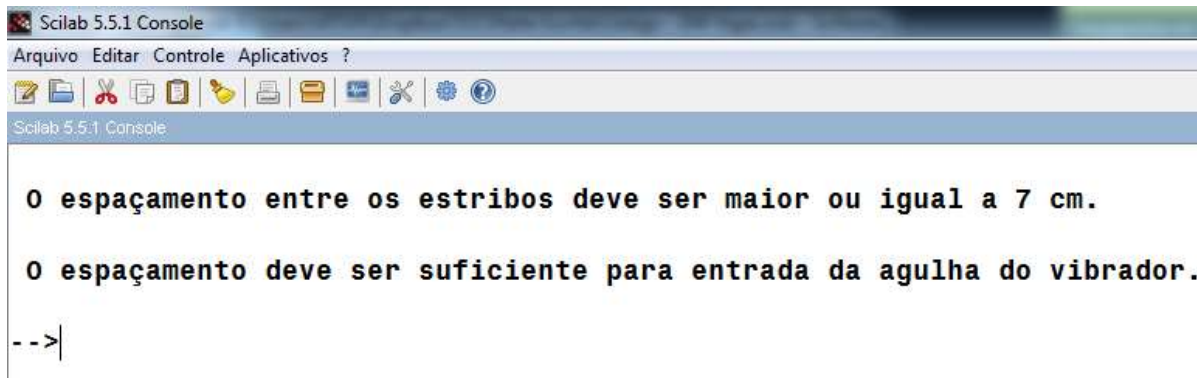
Figura 47 — Esmagamento da biela.



Fonte: Software Scilab.

*j) Espaçamento entre estribos menor que 7 cm*

Figura 48 — Erro do espaçamento entre estribos.



Fonte: Software Scilab.



## 5 CONCLUSÃO

Em virtude dos argumentos apresentados, foi possível inferir que a programação que auxilia na automatização do dimensionamento de vigas retangulares de concreto armado atingiu as metas propostas em termos de funcionalidade. Os resultados fornecidos pela ferramenta foram condizentes com os resultados obtidos de forma analítica. Por ser uma ferramenta gratuita, pode ser utilizado para fins acadêmicos, como forma de comparar os resultados obtidos em sala, e até por profissionais da engenharia pela facilidade na obtenção dos resultados. Além de possuir um layout simples e de fácil manuseio.

O dimensionamento de estruturas era realizado de forma analítica pelos calculistas, através de um processo extenso e trabalhoso com uma relativa possibilidade de erro. Em 1986 surge a primeira ferramenta computacional comercial capaz de dimensionar estruturas de concreto armado de forma automatizada. Em virtude desta automatização, é possível obter modelos com maior aproximação do comportamento real da estrutura. Com o tempo economizado, o engenheiro ganha mais tempo para analisar e se dedicar à concepção estrutural, resultando em projetos com melhor planejamento. Como resultados, os softwares não proporcionam apenas economia, mas também eficiência nos projetos de engenharia.

Para trabalhos futuros, dentro deste escopo, uma possibilidade de ampliação e melhoria da programação, seria calcular as forças solicitantes máximas da viga, através das cargas atuantes, diminuindo mais uma etapa do processo de dimensionamento feito por meio de cálculos manuais e a expansão para vigas com seção "T".

## REFERÊNCIAS

- ALMEIDA, J. J. L. **Uso de ferramenta computacional na análise de estabilidade global de uma edificação em concreto armado**, Revista Especialize On-line IPOG, Goiânia, v. 1, 14p. dez. 2015.
- ALMEIDA, L. C. **Solicitações normais cálculo no estado limite último**. Departamento de Estruturas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002. Notas de aula. 19p.
- ALMEIDA, P. A. O. **Madeira como Material Estrutural**. In: Geraldo Cechela Isaia. (Org.). materiais de construção civil e Princípios de Ciência e Engenharia de Materiais. 1 ed. Sao Paulo: Arte Interativa, 2007, v. 02, p. 1181-1202.
- ALVA, G. M. S. **Concepção estrutural de edifícios em concreto armado**. Departamento de estruturas e construção civil, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2007. 24p.
- ARAÚJO, J. M. **Curso de Concreto Armado**. 1 v. Rio Grande: Editora Dunas, 4. ed., 2014. 269p.
- ARAÚJO, J. M. **Curso de Concreto Armado**. 4 v. Rio Grande: Editora Dunas, 4. ed., 2014. 334p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS DE NORMAS TÉCNICAS NBR, **Edificações habitacionais - Desempenho - Parte 2: Requisitos para os sistemas estruturais NBR 15575:2013 ABNT**, Rio de Janeiro, 2013. 32p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS DE NORMAS TÉCNICAS, **Ações e segurança nas estruturas, NBR 8681, ABNT**, Rio de Janeiro, 2003. 15p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS DE NORMAS TÉCNICAS, **Concreto para fins estruturais - Classificação por grupos de resistência, NBR 8953, ABNT**, Rio de Janeiro, 2015. 3p.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS DE NORMAS TÉCNICAS, **Projeto e execução de obras em concreto armado - Procedimento, NBR 6118, ABNT**, Rio de Janeiro, 2014. 238p.
- BARBATO, R. L. A. **Vigas de concreto armado**. Apostila – Centro Universitário Central Paulista, São Carlos, 2007. 13p.
- BARRETO, L. S. **Iniciação ao Scilab**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2008. Disponível em: <<http://www.mat.ufrgs.br/~guidi/grad/MAT01169/SciLivro2.pdf>>. Acesso em: 17 out. 2016.
- BASTOS, P. S. S. **Dimensionamento de vigas de concreto armado à força cortante**. Departamento de Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2015. Notas de aula. 79p.

BASTOS, P. S. S. **Flexão normal simples - Vigas**. Departamento de Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2015. Notas de aula. 81p.

BASTOS, P. S. S. **Fundamentos do concreto armado**. Departamento de Engenharia Civil, Universidade Estadual Paulista, Bauru, 2014. Notas de aula. 13p.

BORGES, A. N., **Concreto armado: projeto de edifícios**. Rio de Janeiro: Editora Imperial Novo Milênio, 2010. 264p.

CARELLI, J. A. **Cisalhamento em vigas de concreto armado com estribos autotravantes**. 2002. 162p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis. 2002.

CARNEIRO, F. L. L. B. **Resistência ao esforço cortante no concreto armado e protendido**. 1963. Disponível em: <[http://aquarius.ime.eb.br/~webde2/prof/ethomaz/lobocarneiro/trelica\\_moersch.pdf](http://aquarius.ime.eb.br/~webde2/prof/ethomaz/lobocarneiro/trelica_moersch.pdf)>. Acesso em: 01 out. 2016.

CARVALHO, C. B. **Concreto armado**. Apostila – Faculdade Pitágoras, Belo Horizonte, 2012. 165p.

CARVALHO, R. C. **Estruturas em Concreto Protendido: Cálculo e Detalhamento**. 1 ed. São Paulo: Editora PINI, 2012. 431p.

CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. **Calculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**. São Carlos: Editora Udufscar, 2015. 415p.

CARVALHO, R. C.; FIGUEIREDO FILHO, J. R. **Pilares de concreto armado**. Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia São Carlos. Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002. Notas de aula. 25p.

CÉZAR JÚNIOR, K. M. L. C.; SILVA, R. C. **Domínios de deformação em estruturas de concreto: uma nova abordagem para o ensino**. In: Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 38. 2010. Fortaleza. Anais eletrônicos... Viçosa: Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Viçosa. Disponível em: <<http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2010/artigos/517.pdf>>. Acesso em: 29 ago. 2016.

CHRISTOFORO, A. L.; SIMIONI, C. F. **Esforços solicitantes em vigas**. Apostila – Universidade do Estado de Mato Grosso, Sinop, 2014. 47p.

CLÍMACO, J. C. T. S., **Estruturas de concreto armado: fundamentos de projeto, dimensionamento e verificação**, Editora Universidade de Brasília: Finatec, Brasília, 2008. 410p.

CORREIA, V. C. **Estudo da influência do uso de fibras de aço e de estribos no comportamento da ancoragem de barras**. 2012. 166p. Dissertação (mestrado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia São Carlos. Universidade de São Paulo, 2012.

CUNHA, D. J. E. **Análise de fissuração em vigas de concreto armado**. Fortaleza: Universidade Federal do Ceará, 2011. 53p.

DEIFELD, T. E. C. **Estruturas de Concreto Armado I**. Universidade Federal do Pampa, Alegrete, 2013. Notas de aula. 72p.

DUARTE, D. S.; SILVA, D. S.; VARGAS, A.; SILVA, B. V. **Estudo comparativo entre os dois métodos propostos pela NBR 6118:2007 para o dimensionamento da armadura de cisalhamento em vigas sujeitas a flexão simples**. Tecnologia e Ambiente, v. 15, 2013. 14p.

DUARTE, H. **Aspectos da análise estrutural das lajes de edifícios de concreto armado**. 1998. 96p. Dissertação (mestrado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia São Carlos. Universidade de São Paulo, 1998.

FERNANDES, G. B. **Solicitações normais cálculo no estado limite último**. Apostila – Departamento de Estruturas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006. 74p.

FONTES. F. F. **Análise Estrutural de Elementos Lineares Segundo a NBR 6118:2003**. São Carlos: EDUSP, 2005. 137p.

FONTES. F. F.; PINHEIRO, L. M. **Análise linear com redistribuição e análise plástica de vigas de edifícios**. In: Congresso Brasileiro do Concreto, 47. 2005, Recife. Anais do XLVII Congresso Brasileiro do Concreto. São Carlos: Departamento de Engenharia de Estruturas, 2005. 14p.

FONTES. F. F.; PINHEIRO, L. M. **Tipos de análise estrutural para elementos lineares segundo a NBR 6118:2003**. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v. 11, n. 48, p. 117-141, 2009. Disponível em: <[http://www.set.eesc.usp.br/cadernos/nova\\_versao/pdf/cee52\\_117.pdf](http://www.set.eesc.usp.br/cadernos/nova_versao/pdf/cee52_117.pdf)>. Acesso em: 08 set. 2016.

FUSCO, P. B. **Estruturas de concreto: Solicitações Normais**. São Paulo: Editora LTC, 1981. 464p.

FUSCO, P. B. **Estruturas de concreto: solicitações tangenciais**. Rio de Janeiro, RJ: Pini, 2008. 328 p.

FUSCO, P. B.; JUNIOR, C. C.; ALMEIDA, P. A. O. **Norma de projeto de estruturas de madeira**. Boletim Técnico da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo 1996. 122 p.

GORETTI, C. **Uma breve história do concreto armado**. 2013. Disponível em: <<https://blogdopetcivil.com/2013/07/31/a-historia-do-concreto-armado/>>. Acesso em: 19 ago. 2016.

HOFMANN, M. A.; SILVA, B. V. **Análise de vigas de concreto de alta resistência submetidas à flexão simples**. Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2012. 25p.

JACOB, R. G. **Análise e projeto de um reforço estrutural para a ponte rolante do labocean**. 2016. 62p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Escola Politécnica, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2016.

KAEFER, L. F. **A evolução do concreto armado**. (PEF 5707 – Concepção, Projeto e Realização das estruturas: aspectos históricos – 1998.3). São Paulo, 1998. 43p.

KIRST, R. W. **Elementos superficiais laminares em concreto armador: estudo comparativo entre métodos de cálculo**. 2010. 81p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2010.

LAUER, D. **Comparação entre linguagens de programação**. Setor de Tecnologia da Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008. 11p. Trabalho não publicado.

LEITE, M. **SciLab - Uma Abordagem Prática e Didática**. 1. ed. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2009. 632p.

LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. **Construções de concreto – Princípios básicos do dimensionamento de estruturas de concreto armado**. v. 1, Rio de Janeiro, Ed. Interciência, 1982, 305p.

LOPES, L. C. O. **Utilizando o Scilab na resolução de problemas da engenharia química**. In: Congresso Brasileiro de Engenharia Química, 15. 2004, Curitiba. Anais do XV Congresso Brasileiro de Engenharia Química, 2004. 108p.

MACGREGOR, J.G. **Reinforced concrete – Mechanics and design**. 3ª ed., Upper Saddle River, Ed. Prentice Hall, 1997. 939p.

MACIEL, A. R.; SOUZA, C. D.; MOURA, L. P. **Análise global de estruturas em edificações**. 2011. 90p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Anhembi Morumbi, São Paulo, 2011.

MADEIRA, T. **O que é um algoritmo?**. 2006. Disponível em: <<http://tiagomadeira.com/2006/01/algoritmos-o-que-e-um-algoritmo/>>. Acesso em: 16 out. 2016.

MARINS, K. R. C.; TAKAHASHI, R. I.; RIBEIRO, T. G. **Referência para cálculo de concreto armado**. Apostila – Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001. 27p.

MARTHA, L. F. **Análise de Estruturas: Conceitos e Métodos Básicos**. Campus/Elsevier, Rio de Janeiro, 2010. 524p.

MATTOS, N. C. **Dimensionamento de vigas à flexão simples**. 2010. Disponível em: <<http://faq.altoqi.com.br/content/268/651/pt-br/dimensionamento-de-vigas-a-flex%C3%A3o-simples.html>>. Acesso em: 02 set. 2016.

McCORMAC, J.C. ; NELSON, J.K. **Design of reinforced concrete – ACI 318-05 Code Edition**. 7ª ed., John Wiley & Sons, 2006. 721p.

MELO, W. I. G. **Análise dos domínios de deformação de seções retangulares de concreto armado submetidas à flexão composta normal – segundo a NBR 6118/2014**. 2015. 149p. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Centro de tecnologia, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2015.

MESQUITA FILHO, J. **Estudo das vigas: flexão normal simples**. Apostila – Departamento de Engenharia Civil. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Ilha Solteira, 2005. 41p.

MORILLA, J. C. **A estática nas estruturas**. Apostila – Universidade Santa Cecília, Santos, 2010. 49p.

NARDIN, S.; SOUZA, A. S. C. **Sistemas de vigas mistas contínuas e semicontínuas para edifícios**. In: Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural, 33. 2008, Santiago. Anais da XXXIII Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural. São Carlos: Research Gate, 2008. 18p.

NILSON, A.H.; DARWIN, D.; DOLAN, C.W. **Design of concrete structures**. 14ª ed., McGraw Hill Higher Education, 2010. 795p.

OLIVEIRA, A. M.; OLIVEIRA NETO, A. M. ; BUENO, R. C. **Scilab: Uma abordagem prática aplicada a problemas reais da engenharia**. 1. ed. São Paulo: CDA, 2016. v.1. 100p.

PAMBOUKIAN, S. V. D.; CYMROT, R.; ZAMBONI, L. C.; HU, O. R. T.; BARROS, E. D. A. R. **Ensino de programação em cursos de engenharia: interfaces console x interfaces gráficas**. In: Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia, 34. 2011, Blumenau. Anais do XXXIV Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia. São Paulo: Universidade Presbiteriana Mackenzie, 2011. 9p.

PARIZOTTO, L. **Dimensionamento de vigas e lajes em concreto armado segundo a ABNT NBR 6118:2014 e a NF EN 1992-1-1:2005: estudo comparativo**. 2015. 130p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2015.

PASCON, J. P; CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos elásticos com gradação funcional via MEF-P**. Cadernos de Engenharia de Estruturas, São Carlos, v. 11, n. 53, p. 161-165, 2009. Disponível em: <[http://www.set.eesc.usp.br/cadernos/nova\\_versao/pdf/cee53\\_161.pdf](http://www.set.eesc.usp.br/cadernos/nova_versao/pdf/cee53_161.pdf)>. Acesso em: 08 set. 2016.

PEREIRA, J. S. **Modelo não linear de viga para a obtenção de esforços em serviço aplicado a lajes de barragem de enrocamento com face de concreto.** 2009. 133p. Dissertação (mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, 2009.

PINHEIRO, L. M.; MUZARDO, C. D.; SANTOS, S. P. **Bases para cálculo – capítulo 6.** Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003. 19p.

PINHEIRO, L. M.; MUZARDO, C. D.; SANTOS, S. P. **Cisalhamento em vigas – capítulo 13.** Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010. 12p.

PINHEIRO, L. M.; MUZARDO, C. D.; SANTOS, S. P. **Estruturas de concreto – Capítulo 3.** Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010. 14p.

PINHEIRO, L. M.; MUZARDO, C. D.; SANTOS, S. P. **Pré-dimensionamento – capítulo 5.** Departamento de Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003. 6p.

RÊGO, G. M. **Desempenho dos modelos da NBR-6118 para análise de vigas contínuas em concreto armado.** 2005. 160p. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, 2005.

REIS, J. J. **Estabilidade global em edifícios altos.** 2013. 105p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2013.

SAINT-CLAIR, G.; MATA, M.; TEIXEIRA, M.; RIBEIRO, R. **Ferramentas de Programação Numérica.** Curso de Engenharia Mecânica da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Contagem, 2009. 20p. Trabalho não publicado.

SANTINE, C. R. **Projeto e construção de lajes pré-moldadas de concreto armado.** 2005. 165p. Dissertação (mestrado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia São Carlos. Universidade de São Paulo, 2005.

SANTOS JÚNIOR, V. G. **Discussões sobre a verificação da estabilidade global para um edifício residencial de concreto armado.** 2016. 61p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Estadual da Paraíba, Araruna, 2016.

SANTOS, D. **Análise de vigas de concreto utilizando modelos de bielas e tirantes.** 2006. 195p. Dissertação (mestrado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo, 2006.

SANTOS, R. E. **A Armação do Concreto no Brasil: história da difusão da tecnologia do concreto armado e da construção de sua hegemonia.** Belo Horizonte: UFMG, 2008. 338p. Dissertação (mestrado) - Faculdade de Educação. Universidade Federal de Minas Gerais, 2008.

SCADELAI, M. A. **Dimensionamento de pilares de acordo com a NBR 6118:2003**. 2004. 136p. Dissertação (mestrado) – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia São Carlos. Universidade de São Paulo, 2004.

SILVA, E. M. ; CUNHA, J. P. V. S. . **Scilab, Scicos e RIttool: Softwares Livres no Ensino de Engenharia Elétrica**. In: XVI Congresso Brasileiro de Automática, 2006, Salvador. Anais do XVI Congresso Brasileiro de Automática, 2006. p. 1620-1625.

SILVA, N. A. **Concreto Armado I**. Apostila – Departamento de Engenharia de Estruturas, Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2005. 154p.

SILVA, R. J. C.; ARAÚJO, C. V. S. **Estudo das taxas mínimas de armadura de tração em vigas de concreto armado segundo a ABNT NBR 6118: 2014**. Essentia-Revista de Cultura, Ciência e Tecnologia da UVA, v. 16, 2015. 17p.

SOUZA, M. F. S. M; RODRIGUES, R. B. **Sistemas estruturais de edificações e exemplos**. Apostila – Departamento de Estruturas, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008. 93p.

SÜSSEKIND, J. C. **Curso de análise estrutural**. v.1. 6ª ed. Porto Alegre: Ed. Globo, 1981. 384p.

SZÜCS, C. A; TEREZO, R. F.; VALLE, A.; MORAES, P. D. **Estruturas de madeira**. Apostila – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2015. 219p.

SZÜCS, C. A; TEREZO, R. F.; VALLE, A.; MORAES, P. D. **Estruturas de madeira**. Apostila – Departamento de Engenharia Civil, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005. 146p.

TEIXEIRA, M. G. S. **Programação I**. Departamento de Engenharias e Computação, Universidade Federal do Espírito Santo, São Matheus, 2010. Notas de aula. 115p.

TEIXEIRA, P. W. G. N. **Aula 04 – Peças submetidas à flexão simples: solicitações normais**. Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011. 16p.

VIRGOLINO, P. M.; PELLEGRINO NETO, J. **Desenvolvimento de aplicativos para o ensino de estruturas de concreto**. 2015. 10p. Disponível em: <<http://maua.br/files/032015/desenvolvimento-de-aplicativos-para-o-ensino-de-estruturas-de-concreto.pdf>>. Acesso em: 11 out. 2016.

WEBER. L. F. L. **Cobrimento de armadura em estruturas de concreto armado: análise comparativa entre os valores projetados e executados nas obras do Vale do Taquari**. Lajeado: Centro Universitário UNIVATES, 2014. 97p.

ZORZAN, L. **Dimensionamento da armadura transversal de vigas de concreto armado pela NBR 6118/2014**. 2016. 96p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação) – Universidade Regional do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul, Santa Rosa, 2015.



## GLOSSÁRIO

Ancoragem: mecanismo de transferência integral de forças submetidas de barras das armaduras ao concreto seja por meio de aderência, dispositivos mecânicos ou por combinação de ambos.

Banzo: parte da seção transversal de uma viga em que está submetida à tração ou compressão.

Biela: barra ou porção de concreto dispostos na diagonal de uma viga em que são sujeitas a esforços axiais.

Ductilidade: é a propriedade física dos materiais de suportar a deformação plástica, sob a ação de cargas, sem se romper ou fraturar.

Engrenamento dos agregados: É quando os agregados continua transferindo as tensões através das trincas.

Fendilhamento: ação de fazer pequenas fendas.

Incombustibilidade: particularidade ou qualidade do que é incombustível; característica do que não se queima.

Pozolana: material silicoso ou sílico-aluminoso que, quando finamente moído e na presença de água, reage com hidróxido de cálcio formando compostos com propriedades cimentícias

## APÊNDICE A – CODIGO DE PROGRAMAÇÃO DO SCILAB

```

clear
clc
//Base da viga (cm)
bw = 00
//Altura da viga (cm)
h= 00
//Altura util (cm)
d= 00
//Cobrimento (cm)
c= 00
//Resistência a compressão (MPa)
fck= 00
//Aço da armadura longitudinal (kN/cm²)
ca1= 00
//Diâmetro do estribo (mm)
de= 00
//Aço do estribo (kN/cm²)
ca2= 00
//Momento fletor (kN.m)
mk= 00
//Força cortante (kN)
vk= 00

p1=(vk.*1.4)/(bw.*d).*10
p2=((0.27).*(1-(fck./250)).*(fck./1.4))
if (p1>p2) then
disp("Ocorreu o esmagamento da biela de compressão.")
disp("Verificar dados de entrada.")
else

if (d > h) then
disp("A altura útil da viga deve ser menor que altura total.")

```

```
disp("Ajustar valores.")  
else
```

```
if (fck<20 | fck>90 ) then  
disp("Valor do fck fora do intervalo permitido pela NBR 6118:2014.")  
disp("Ajustar entre C20 e C90.")  
else
```

```
if (ca1<25 | ca2<25) then  
disp("A resistência de escoamento mínima para o aço deve ser maior ou igual a 25  
kN/cm².")  
disp("Adotar no mínimo 25 kN/cm².")  
else
```

```
if (bw < 10) then  
disp("A NBR 6118:2014 não permite que a base seja menor que 10 cm.")  
disp("Aumentar o valor da base.")  
else
```

```
if (c < 2) then  
disp("A NBR 6118:2014 não permite que o cobrimento de concreto seja menor que 2  
cm.")  
disp("Aumentar o valor do cobrimento.")  
else
```

```
if (de < 5) then  
disp("O diametro da barra que constitui o estribo deve ser maior ou igual a 5 mm.")  
disp("Adotar no mínimo 5 mm.")  
else
```

```
if (fck >= 20 & fck<=50) then  
lambda=0.8  
alphac=0.85  
xd=0.45
```

```
pmin1= (0.078.*fck.^((2 ./3)))/((ca1.*10) ./1.15)
```

```
if (pmin1>=0.0015) then
```

```
pmin = pmin1.*(bw.*h)
```

```
else
```

```
pmin = 0.0015.*(bw.*h)
```

```
end
```

```
end
```

```
if (fck > 50 & fck<=90) then
```

```
lambda=0.8-((fck-50)./400)
```

```
alphac=0.85.*(1-((fck-50)./200))
```

```
xd=0.35
```

```
pmin1=(0.5512.*log(1+0.11.*fck))/((ca1.*10)/1.15)
```

```
if (pmin1>=0.0015) then
```

```
pmin = pmin1.*(bw.*h)
```

```
else
```

```
pmin = 0.0015.*(bw.*h)
```

```
end
```

```
end
```

```
md=mk.*(1.4)
```

```
mlim=(bw./100).*alphac.*(fck.*1000 ./1.4).*lambda.*(xd).*(d./100).*((d./100)-  
(0.5.*lambda.*(xd).*(d./100)))
```

```
//Cálculo do LN
```

```
fcd=(fck.*1000)./1.4
```

```
bw= bw ./100
```

```
aux1 = 2. *(md ./ (bw.*alphac.*fcd) )
```

```
d = d ./ 100
```

```
LN = d - sqrt( d.^(2) -aux1 )
```

```
LN = LN ./ lambda
```

```
LN = LN.*100
```

```
Kx=LN./d
```

```
Kx = Kx ./ 100
```

```

asmax=100.*bw.*h.*0.04

if ((d.^2)-aux1)<0 | Kx>1 | LN>h) then
disp("Domínio superior ao 4.")
disp("Verificar dados de entrada.")
else
if (Kx<=0.259) then
dom = 2
end
if (Kx>0.259 & Kx<=0.771 & ca1 ==25) then
dom = 3
end
if (Kx>0.771 & ca1 ==25) then
dom = 4
end
if (Kx>0.259 & Kx<=0.6283 & ca1 ==50) then
dom = 3
end
if (Kx>0.6283 & ca1 ==50) then
dom = 4
end
if (Kx>0.259 & Kx<=0.585 & ca1 ==60) then
dom = 3
end
if (Kx>0.585 & ca1 ==60) then
dom = 4
end

//CÁLCULO DA ÁREA DE AÇO
if (md <= mlim) then

//armadura simples
duc = 'OK'
aux2 = d - (0.5.*lambda.*(LN./100))

```

```
fyd =(ca1)./1.15
as=md./(aux2.*fyd)
taxa=as ./(bw.*h)
else
```

```
//Armadura dupla
```

```
fyd =(ca1)./1.15
duc = 'NÃO OK'
h = h./100
aux3=(mlim)/(((d)-(0.5.*xd.*(d).*lambda)).*(fyd))
as2= (md - mlim) . /((d - (h - d)).*fyd)
as = aux3 + as2
taxa=((as+as2) ./(bw.*h)) ./100
end
if (taxa > 4) then
disp("Taxa de armadura maior que 4%.")
disp("Verificar dados de entrada.")
else
```

```
//Armadura transversal
```

```
bw=100.*bw
d=100.*d
aux5= (vk.*(1.4))./(bw.*d).*10
aux6= (0.6).*(0.15).*(fck.^2 ./3))
tsw=aux5 - aux6
```

```
if (ca2>50) then
```

```
fywd = (50.*10) ./ (1.15)
aux7= ((1.11).*tsw) ./fywd
aux8 = (0.2).*(0.3).*(fck.^2 ./3))
fywk = 50 .*10
aux8 = aux8 ./ fywk
if (aux7>aux8) then
S=floor((((2.*%pi.*((de./10).^2))))./4) ./ (aux7.*bw))
```

```

else
S=floor((((2.*%pi.*((de./10).^2))))./4) ./ (aux8.*bw)
end

else
fywd = (ca2.*10) ./ (1.15)
aux7= ((1.11).*tsw) ./fywd
aux8 = (0.2).*(0.3).*(fck.^2 ./3))
fywk = ca2.*10
aux8 = aux8 ./ fywk
if (aux7>aux8) then
S=floor((((2.*%pi.*((de./10).^2))))./4) ./ (aux7.*bw)
else
S=floor((((2.*%pi.*((de./10).^2))))./4) ./ (aux8.*bw)
end
end
if(S>20)
S=20
end

if (S < 7) then
disp("O espaçamento entre os estribos deve ser maior ou igual a 7 cm.")
disp("O espaçamento deve ser suficiente para entrada da agulha do vibrador.")
else

printf("As (cm²): %5.4g",as)
printf(" \n ")
if (md > mlim) then
printf("A`s (cm²): %4.4g",as2)
else
printf("A`s (cm²): %s","Sustentação")
end
printf(" \n ")
printf("DOMÍNIO: %g",dom)

```

```
printf(" \n ")
printf("DUCTILIDADE: %s",duc)
printf(" \n ")
printf("LN (cm): %5.4g",LN)
printf(" \n ")
printf("Kx: %5.3g",Kx)
printf(" \n ")
printf("Md (kN.m): %5.5g",md)
printf(" \n ")
printf("Mlim (kN.m): %5.5g",mlim)
printf(" \n ")
printf("Taxa: %4.3g %%",taxa)
printf(" \n ")
printf("Asmax (cm2):%4.4g",asmax)
printf(" \n ")
printf("Asmin (cm2): %4.4g",pmin)
printf(" \n ")
printf("ESTRIBO: Ø %3.3g mm c/%2.2g cm \n",de,S)
end
end
end
end
end
end
end
end
end
end
end
```



## APÊNDICE B – DIMENSIONAMENTO MANUAL DE VIGAS RETANGULARES DE CONCRETO ARMADO

### 1) Viga 1

Dados da viga:

b <sub>w</sub> = 15 cm	f <sub>ck</sub> = 25 MPa
h = 50 cm	CA 1 = 50 kN/cm <sup>2</sup>
c = 2,5 cm	Ø <sub>e</sub> = 5,0 mm
d = 45 cm	CA 2 = 50 kN/cm <sup>2</sup>
M <sub>k</sub> = 48 kN.m	V <sub>k</sub> = 96 kN

Valores constantes:

$$\gamma_c = \gamma_f = 1,4$$

$$\gamma_s = 1,15$$

a) Cálculo da linha neutra

Para f<sub>ck</sub> ≤ 50 MPa, tem-se:

$$\alpha_c = 0,85$$

$$\lambda = 0,8$$

$$x = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 2 \cdot \left( \frac{M_d}{b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd}} \right)}}{\lambda} \Rightarrow \frac{0,45 \pm \sqrt{0,45^2 - 2 \cdot \left( \frac{48 \cdot 1,4}{0,15 \cdot 0,85 \cdot \left( \frac{25 \cdot 1000}{1,4} \right)} \right)}}{0,8} \cdot 100$$

$$x_1 = 8,90 \text{ cm}$$

$$x_2 = 103,60 \text{ cm}$$

Portanto:

$$x = \mathbf{8,90 \text{ cm}}$$

b) Cálculo de  $K_x$

$$K_x = \frac{x}{d} \Rightarrow \frac{8,90}{45} = \mathbf{0,20}$$

c) Verificação de ductilidade

$$K_x \leq 0,45 \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

$$0,20 \leq 0,45 \Rightarrow \mathbf{OK}$$

d) Domínio de deformação para aço CA-50

$$K_x < 0,259 \Rightarrow \text{domínio 2}$$

$$0,259 < K_x < 0,6283 \Rightarrow \text{domínio 3}$$

$$0,6283 < K_x < 1,0 \Rightarrow \text{domínio 4}$$

Como:

$$0,20 < 0,259 \Rightarrow \mathbf{\text{domínio 2}}$$

e) Momento obtido impondo que a seção trabalhe no limite da ductilidade

$$\frac{x}{d} = 0,45 \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

$$M_{lim} = b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \lambda \cdot \left(\frac{x}{d}\right) \cdot d^2 \cdot \left(1 - 0,5 \cdot \lambda \cdot \left(\frac{x}{d}\right)\right)$$

$$M_{lim} = 0,15 \cdot 0,85 \cdot \frac{25 \cdot 1000}{1,4} \cdot 0,8 \cdot 0,45 \cdot 0,45^2 \cdot (1 - 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,45) = \mathbf{136,10 \text{ kN.m}}$$

f) Cálculo da área de aço

Como:

$$M_{lim} \geq M_d \Rightarrow 136,10 \text{ kN.m} \geq 48 \cdot 1,4 = 67,2 \text{ kN.m}$$

### Armadura simples

$$A_s = \frac{M_d}{(d - 0,5 \cdot \lambda \cdot x) \cdot f_{yd}} \Rightarrow \frac{48 \cdot 1,4}{(0,45 - 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,089) \cdot \frac{50}{1,15}} = 3,73 \text{ cm}^2$$

g) Taxa de armadura

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} \Rightarrow \frac{3,73}{15 \cdot 50} = 0,50\%$$

h) Armadura longitudinal mínima

Para  $f_{ck} \leq 50$  MPa, tem-se:

$$\rho_{min} \geq \begin{cases} \frac{0,078 \cdot f_{ck}^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{f_{yd}} = \frac{0,078 \cdot 25^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{\frac{50 \cdot 10}{1,15}} = 0,1534\% \\ 0,150\% \end{cases}$$

$$\rho_{min} = 0,1534\%$$

$$A_{s,min} = \rho_{min} \cdot A_c \Rightarrow 0,1534\% \cdot 15 \cdot 50 = 1,15 \text{ cm}^2$$

i) Armadura longitudinal máxima

$$A_{s,max} = 4\% \cdot A_c \Rightarrow 4\% \cdot 15 \cdot 50 = 30,0 \text{ cm}^2$$

j) Verificação da compressão diagonal do concreto

$$\frac{V_k \cdot \gamma_f}{b_w \cdot d} \leq 0,27 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \cdot f_{cd} \Rightarrow \frac{96 \cdot 1,4}{15 \cdot 45} \cdot 10 \leq 0,27 \cdot \left(1 - \frac{25}{250}\right) \cdot \frac{25}{1,4} \Rightarrow$$

$$1,99 \leq 4,34$$

Portanto não o esmagamento da biela.

l) Cálculo da armadura transversal

$$\tau_{SW} = \left( \frac{V_k \cdot \gamma_f}{b_w \cdot d} \right) - \left( 0,6 \cdot 0,15 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}} \right) \Rightarrow \left( \frac{96 \cdot 1,4}{15 \cdot 45} \cdot 10 \right) - \left( 0,6 \cdot 0,15 \cdot 25^{\frac{2}{3}} \right) \Rightarrow$$

$$\tau_{SW} = 1,99 - 0,77 = 1,22$$

$$\rho_{sw,90} \geq \begin{cases} \frac{1,11 \cdot \tau_{sw}}{f_{ywd}} = \frac{1,11 \cdot 1,22}{\frac{50 \cdot 10}{1,15}} = 0,003115 \\ \frac{0,2 \cdot 0,3 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}}}{f_{ywk}} = \frac{0,2 \cdot 0,3 \cdot 25^{\frac{2}{3}}}{50 \cdot 10} = 0,001026 \end{cases}$$

Logo:

$$\rho_{sw,90} = 0,003115$$

$$s \leq \begin{cases} \frac{2 \cdot \left( \pi \cdot \frac{\phi_e^2}{4} \right)}{\rho_{sw,90} \cdot b_w} = \frac{2 \cdot \left( \pi \cdot \frac{0,5^2}{4} \right)}{0,003115 \cdot 15} = 8,40 \text{ cm} \\ 20 \text{ cm} \end{cases}$$

$$s = 8,40 \text{ cm}$$

Portanto:

$$\mathbf{\phi 5,0 \text{ mm } c / 8,0 \text{ cm}}$$

## 2) Viga 2

Dados da viga:

$$b_w = 15 \text{ cm}$$

$$f_{ck} = 60 \text{ MPa}$$

$$h = 50 \text{ cm}$$

$$CA 1 = 60 \text{ kN/cm}^2$$

$$c = 2,5 \text{ cm}$$

$$\phi_e = 5,0 \text{ mm}$$

$$d = 45 \text{ cm}$$

$$CA 2 = 25 \text{ kN/cm}^2$$

$$M_k = 60 \text{ kN.m}$$

$$V_k = 100 \text{ kN}$$

Valores constantes:

$$\gamma_c = \gamma_f = 1,4$$

$$\gamma_s = 1,15$$

a) Cálculo da linha neutra

Para  $50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$ , tem-se:

$$\alpha_c = 0,85 \cdot \left[ 1,0 - \left( \frac{f_{ck} - 50}{200} \right) \right] \Rightarrow 0,85 \cdot \left[ 1,0 - \left( \frac{60 - 50}{200} \right) \right] = 0,808$$

$$\lambda = 0,8 - \left( \frac{f_{ck} - 50}{400} \right) \Rightarrow 0,8 - \left( \frac{60 - 50}{400} \right) = 0,775$$

$$x = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 2 \cdot \left( \frac{M_d}{b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd}} \right)}}{\lambda} \Rightarrow \frac{0,45 \pm \sqrt{0,45^2 - 2 \cdot \left( \frac{60 \cdot 1,4}{0,15 \cdot 0,808 \cdot \left( \frac{60 \cdot 1000}{1,4} \right)} \right)}}{0,775} \cdot 100$$

$$x_1 = 4,84 \text{ cm}$$

$$x_2 = 111,29 \text{ cm}$$

Portanto:

$$x = 4,84 \text{ cm}$$

b) Cálculo de  $K_x$

$$K_x = \frac{x}{d} \Rightarrow \frac{4,84}{45} = 0,11$$

c) Verificação de ductilidade

$$K_x \leq 0,35 \text{ para } 50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$$

$$0,11 \leq 0,35 \Rightarrow \text{OK}$$

d) Domínio de deformação para aço CA-60

$$K_x < 0,259 \Rightarrow \text{domínio 2}$$

$$0,259 < K_x < 0,585 \Rightarrow \text{domínio 3}$$

$$0,585 < K_x < 1,0 \Rightarrow \text{domínio 4}$$

Como:

$$0,11 < 0,259 \Rightarrow \text{domínio 2}$$

e) Momento obtido impondo que a seção trabalhe no limite da ductilidade

$$\frac{x}{d} = 0,35 \text{ para } 50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$$

$$M_{lim} = b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \lambda \cdot \left(\frac{x}{d}\right) \cdot d^2 \cdot \left(1 - 0,5 \cdot \lambda \cdot \left(\frac{x}{d}\right)\right)$$

$$M_{lim} = 0,15 \cdot 0,808 \cdot \frac{60 \cdot 1000}{1,4} \cdot 0,775 \cdot 0,35 \cdot 0,45^2 \cdot (1 - 0,5 \cdot 0,775 \cdot 0,35) = 246,46 \text{ kN.m}$$

f) Cálculo da área de aço

Como:

$$M_{lim} \geq M_d \Rightarrow 246,46 \text{ kN.m} \geq 60 \cdot 1,4 = 84,0 \text{ kN.m}$$

**Armadura simples**

$$A_s = \frac{M_d}{(d - 0,5 \cdot \lambda \cdot x) \cdot f_{yd}} \Rightarrow \frac{60 \cdot 1,4}{(0,45 - 0,5 \cdot 0,775 \cdot 0,0484) \cdot \frac{60}{1,15}} = 3,73 \text{ cm}^2$$

g) Taxa de armadura

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} \Rightarrow \frac{3,73}{15 \cdot 50} = 0,50\%$$

h) Armadura longitudinal mínima

Para  $50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$ , tem-se:

$$\rho_{min} \geq \begin{cases} \frac{0,5512 \cdot \ln(1+0,11 \cdot f_{ck})}{f_{yd}} = \frac{0,5512 \cdot \ln(1+0,11 \cdot 60)}{\frac{60 \cdot 10}{1,15}} = 0,2143\% \\ 0,150\% \end{cases}$$

$$\rho_{min} = 0,2143\%$$

$$A_{s,min} = \rho_{min} \cdot A_c \Rightarrow 0,2143\% \cdot 15 \cdot 50 = \mathbf{1,61 \text{ cm}^2}$$

i) Armadura longitudinal máxima

$$A_{s,max} = 4\% \cdot A_c \Rightarrow 4\% \cdot 15 \cdot 50 = \mathbf{30,0 \text{ cm}^2}$$

j) Verificação da compressão diagonal do concreto

$$\frac{V_k \cdot \gamma_f}{b_w \cdot d} \leq 0,27 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \cdot f_{cd} \Rightarrow \frac{100 \cdot 1,4}{15 \cdot 45} \cdot 10 \leq 0,27 \cdot \left(1 - \frac{60}{250}\right) \cdot \frac{60}{1,4} \Rightarrow$$

$$2,07 \leq 8,79$$

Portanto não o esmagamento da biela.

l) Cálculo da armadura transversal

$$\tau_{sw} = \left(\frac{V_k \cdot \gamma_f}{b_w \cdot d}\right) - \left(0,6 \cdot 0,15 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow \left(\frac{100 \cdot 1,4}{15 \cdot 45} \cdot 10\right) - \left(0,6 \cdot 0,15 \cdot 60^{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow$$

$$\tau_{sw} = 2,07 - 1,38 = 0,69$$

$$\rho_{sw,90} \geq \begin{cases} \frac{1,11 \cdot \tau_{sw}}{f_{ywd}} = \frac{1,11 \cdot 0,69}{\frac{25 \cdot 10}{1,15}} = 0,003547 \\ \frac{0,2 \cdot 0,3 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}}}{f_{ywk}} = \frac{0,2 \cdot 0,3 \cdot 60^{\frac{2}{3}}}{25 \cdot 10} = 0,003678 \end{cases}$$

Logo:

$$\rho_{sw,90} = 0,003678$$

$$s \leq \begin{cases} \frac{2 \cdot \left( \pi \cdot \frac{\phi_e^2}{4} \right)}{\rho_{sw,90} \cdot b_w} = \frac{2 \cdot \left( \pi \cdot \frac{0,5^2}{4} \right)}{0,003678 \cdot 15} = 7,12 \text{ cm} \\ 20 \text{ cm} \end{cases}$$

$$s = 7,12 \text{ cm}$$

Portanto:

$$\phi 5,0 \text{ mm } c / 7,0 \text{ cm}$$

### 3) Viga 3

Dados da viga:

$$b_w = 12 \text{ cm}$$

$$f_{ck} = 35 \text{ MPa}$$

$$h = 25 \text{ cm}$$

$$CA 1 = 25 \text{ kN/cm}^2$$

$$c = 2,0 \text{ cm}$$

$$\phi_e = 6,3 \text{ mm}$$

$$d = 22,5 \text{ cm}$$

$$CA 2 = 50 \text{ kN/cm}^2$$

$$M_k = 20 \text{ kN.m}$$

$$V_k = 35 \text{ kN}$$

Valores constantes:

$$\gamma_c = \gamma_f = 1,4$$

$$\gamma_s = 1,15$$

a) Cálculo da linha neutra

Para  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ , tem-se:

$$\alpha_c = 0,85$$

$$\lambda = 0,8$$



$$x = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 2 \cdot \left( \frac{M_d}{b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd}} \right)}}{\lambda} \Rightarrow \frac{0,225 \pm \sqrt{0,225^2 - 2 \cdot \left( \frac{20 \cdot 1,4}{0,12 \cdot 0,85 \cdot \left( \frac{35 \cdot 1000}{1,4} \right)} \right)}}{0,8} \cdot 100$$

$$x_1 = 6,96 \text{ cm}$$

$$x_2 = 49,29 \text{ cm}$$

Portanto:

$$x = \mathbf{6,96 \text{ cm}}$$

b) Cálculo de  $K_x$

$$K_x = \frac{x}{d} \Rightarrow \frac{6,96}{22,5} = \mathbf{0,31}$$

c) Verificação de ductilidade

$$K_x \leq 0,45 \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

$$0,31 \leq 0,45 \Rightarrow \mathbf{OK}$$

d) Domínio de deformação para aço CA-25

$$K_x < 0,259 \Rightarrow \text{domínio 2}$$

$$0,259 < K_x < 0,7709 \Rightarrow \text{domínio 3}$$

$$0,7709 < K_x < 1,0 \Rightarrow \text{domínio 4}$$

Como:

$$0,259 < \mathbf{0,31} < 0,7709 \Rightarrow \mathbf{\text{domínio 3}}$$

e) Momento obtido impondo que a seção trabalhe no limite da ductilidade

$$\frac{x}{d} = 0,45 \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

$$M_{lim} = b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \lambda \cdot \left(\frac{x}{d}\right) \cdot d^2 \cdot \left(1 - 0,5 \cdot \lambda \cdot \left(\frac{x}{d}\right)\right)$$

$$M_{lim} = 0,12 \cdot 0,85 \cdot \frac{35.1000}{1,4} \cdot 0,8 \cdot 0,45 \cdot 0,225^2 \cdot (1 - 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,45) = \mathbf{38,11 \text{ kN.m}}$$

f) Cálculo da área de aço

Como:

$$M_{lim} \geq M_d \Leftrightarrow 38,11 \text{ kN.m} \geq 20 \cdot 1,4 = 28,0 \text{ kN.m}$$

**Armadura simples**

$$A_s = \frac{M_d}{(d - 0,5 \cdot \lambda \cdot x) \cdot f_{yd}} \Leftrightarrow \frac{20 \cdot 1,4}{(0,225 - 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,0696) \cdot \frac{25}{1,15}} = \mathbf{6,53 \text{ cm}^2}$$

g) Taxa de armadura

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} \Leftrightarrow \frac{6,53}{12 \cdot 25} = \mathbf{2,18\%}$$

h) Armadura longitudinal mínima

Para  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ , tem-se:

$$\rho_{min} \geq \begin{cases} \frac{0,078 \cdot f_{ck}^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{f_{yd}} = \frac{0,078 \cdot 35^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{\frac{25 \cdot 10}{1,15}} = 0,3839\% \\ 0,150\% \end{cases}$$

$$\rho_{min} = 0,3839\%$$

$$A_{s,min} = \rho_{min} \cdot A_c \Leftrightarrow 0,3839\% \cdot 12 \cdot 25 = \mathbf{1,15 \text{ cm}^2}$$

i) Armadura longitudinal máxima

$$A_{s,max} = 4\% \cdot A_c \Leftrightarrow 4\% \cdot 12 \cdot 25 = \mathbf{12,0 \text{ cm}^2}$$

j) Verificação da compressão diagonal do concreto

$$\frac{V_k \cdot \gamma_f}{b_w \cdot d} \leq 0,27 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \cdot f_{cd} \Leftrightarrow \frac{35 \cdot 1,4}{12 \cdot 22,5} \cdot 10 \leq 0,27 \cdot \left(1 - \frac{35}{250}\right) \cdot \frac{35}{1,4} \Leftrightarrow$$

$$1,81 \leq 5,81$$

Portanto não o esmagamento da biela.

l) Cálculo da armadura transversal

$$\tau_{SW} = \left(\frac{V_k \cdot \gamma_f}{b_w \cdot d}\right) - \left(0,6 \cdot 0,15 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{35 \cdot 1,4}{12 \cdot 22,5} \cdot 10\right) - \left(0,6 \cdot 0,15 \cdot 35^{\frac{2}{3}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\tau_{SW} = 1,81 - 0,96 = 0,85$$

$$\rho_{sw,90} \geq \begin{cases} \frac{1,11 \cdot \tau_{SW}}{f_{ywd}} = \frac{1,11 \cdot 0,85}{\frac{50 \cdot 10}{1,15}} = 0,002175 \\ \frac{0,2 \cdot 0,3 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}}}{f_{ywK}} = \frac{0,2 \cdot 0,3 \cdot 35^{\frac{2}{3}}}{50 \cdot 10} = 0,001283 \end{cases}$$

Logo:

$$\rho_{sw,90} = 0,002175$$

$$s \leq \begin{cases} \frac{2 \cdot \left(\pi \cdot \frac{\phi_e^2}{4}\right)}{\rho_{sw,90} \cdot b_w} = \frac{2 \cdot \left(\pi \cdot \frac{0,63^2}{4}\right)}{0,002175 \cdot 12} = 23,89 \text{ cm} \\ 20 \text{ cm} \end{cases}$$

$$s = 20,0 \text{ cm}$$

Portanto:

$$\mathbf{\phi 6,3 \text{ mm } c / 20,0 \text{ cm}}$$

#### 4) Viga 4

Dados da viga:

$$b_w = 12 \text{ cm}$$

$$f_{ck} = 50 \text{ MPa}$$

$$h = 25 \text{ cm}$$

$$CA 1 = 50 \text{ kN/cm}^2$$

$$c = 2,0 \text{ cm}$$

$$\varnothing_e = 5,0 \text{ mm}$$

$$d = 22,5 \text{ cm}$$

$$CA 2 = 60 \text{ kN/cm}^2$$

$$M_k = 35 \text{ kN.m}$$

$$V_k = 45 \text{ kN}$$

Valores constantes:

$$\gamma_c = \gamma_f = 1,4$$

$$\gamma_s = 1,15$$

a) Cálculo da linha neutra

Para  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$ , tem-se:

$$\alpha_c = 0,85$$

$$\lambda = 0,8$$

$$x = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 2 \cdot \left( \frac{M_d}{b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd}} \right)}}{\lambda} \Rightarrow \frac{0,225 \pm \sqrt{0,225^2 - 2 \cdot \left( \frac{35 \cdot 1,4}{0,12 \cdot 0,85 \cdot \left( \frac{50 \cdot 1000}{1,4} \right)} \right)}}{0,8} \cdot 100$$

$$x_1 = 8,87 \text{ cm}$$

$$x_2 = 47,38 \text{ cm}$$

Portanto:

$$x = \mathbf{8,87 \text{ cm}}$$

b) Cálculo de  $K_x$

$$K_x = \frac{x}{d} \Rightarrow \frac{8,87}{22,5} = \mathbf{0,39}$$

c) Verificação de ductilidade

$$K_x \leq 0,45 \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

$$0,39 \leq 0,45 \Rightarrow \mathbf{OK}$$

d) Domínio de deformação para aço CA-50

$$K_x < 0,259 \Rightarrow \text{domínio 2}$$

$$0,259 < K_x < 0,6283 \Rightarrow \text{domínio 3}$$

$$0,6283 < K_x < 1,0 \Rightarrow \text{domínio 4}$$

Como:

$$0,259 < \mathbf{0,39} < 0,6283 \Rightarrow \mathbf{domínio 3}$$

e) Momento obtido impondo que a seção trabalhe no limite da ductilidade

$$\frac{x}{d} = 0,45 \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

$$M_{lim} = b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \lambda \cdot \left(\frac{x}{d}\right) \cdot d^2 \cdot \left(1 - 0,5 \cdot \lambda \cdot \left(\frac{x}{d}\right)\right)$$

$$M_{lim} = 0,12 \cdot 0,85 \cdot \frac{50 \cdot 1000}{1,4} \cdot 0,8 \cdot 0,45 \cdot 0,225^2 \cdot (1 - 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,45) = \mathbf{54,44 \text{ kN.m}}$$

f) Cálculo da área de aço

Como:

$$M_{lim} \geq M_d \Rightarrow 54,44 \text{ kN.m} \geq 35 \cdot 1,4 = 49,0 \text{ kN.m}$$

**Armadura simples**

$$A_s = \frac{M_d}{(d - 0,5 \cdot \lambda \cdot x) \cdot f_{yd}} \Rightarrow \frac{35 \cdot 1,4}{(0,225 - 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,0887) \cdot \frac{50}{1,15}} = 5,95 \text{ cm}^2$$

g) Taxa de armadura

$$\rho = \frac{A_s}{A_c} \Rightarrow \frac{5,95}{12 \cdot 25} = 1,98\%$$

h) Armadura longitudinal mínima

Para  $f_{ck} \leq 50$  MPa, tem-se:

$$\rho_{min} \geq \begin{cases} \frac{0,078 \cdot f_{ck}^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{f_{yd}} = \frac{0,078 \cdot 50^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{\frac{50 \cdot 10}{1,15}} = 0,2435\% \\ 0,150\% \end{cases}$$

$$\rho_{min} = 0,2435\%$$

$$A_{s,min} = \rho_{min} \cdot A_c \Rightarrow 0,2435\% \cdot 12 \cdot 25 = 0,73 \text{ cm}^2$$

i) Armadura longitudinal máxima

$$A_{s,max} = 4\% \cdot A_c \Rightarrow 4\% \cdot 12 \cdot 25 = 12,0 \text{ cm}^2$$

j) Verificação da compressão diagonal do concreto

$$\frac{V_k \cdot \gamma_f}{b_w \cdot d} \leq 0,27 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \cdot f_{cd} \Rightarrow \frac{45 \cdot 1,4}{12 \cdot 22,5} \cdot 10 \leq 0,27 \cdot \left(1 - \frac{50}{250}\right) \cdot \frac{50}{1,4} \Rightarrow$$

$$2,33 \leq 7,71$$

Portanto não o esmagamento da biela.

l) Cálculo da armadura transversal

$$\tau_{SW} = \left(\frac{V_k \cdot \gamma_f}{b_w \cdot d}\right) - \left(0,6 \cdot 0,15 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow \left(\frac{45 \cdot 1,4}{12 \cdot 22,5} \cdot 10\right) - \left(0,6 \cdot 0,15 \cdot 50^{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow$$

$$\tau_{sw} = 2,33 - 1,22 = 1,11$$

$$\rho_{sw,90} \geq \begin{cases} \frac{1,11 \cdot \tau_{sw}}{f_{ywd}} = \frac{1,11 \cdot 1,11}{\frac{50 \cdot 10}{1,15}} = 0,002839 \\ \frac{0,2 \cdot 0,3 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}}}{f_{ywk}} = \frac{0,2 \cdot 0,3 \cdot 50^{\frac{2}{3}}}{60 \cdot 10} = 0,001357 \end{cases}$$

Logo:

$$\rho_{sw,90} = 0,002839$$

$$s \leq \begin{cases} \frac{2 \cdot \left( \pi \cdot \frac{\emptyset_e^2}{4} \right)}{\rho_{sw,90} \cdot b_w} = \frac{2 \cdot \left( \pi \cdot \frac{0,5^2}{4} \right)}{0,002839 \cdot 12} = 11,53 \text{ cm} \\ 20 \text{ cm} \end{cases}$$

$$s = 11,53 \text{ cm}$$

Portanto:

$$\emptyset 5,0 \text{ mm } c/ 11,0 \text{ cm}$$

## 5) Viga 5

Dados da viga:

$$b_w = 30 \text{ cm}$$

$$f_{ck} = 20 \text{ MPa}$$

$$h = 90 \text{ cm}$$

$$CA 1 = 50 \text{ kN/cm}^2$$

$$c = 2,5 \text{ cm}$$

$$\emptyset_e = 10,0 \text{ mm}$$

$$d = 81 \text{ cm}$$

$$CA 2 = 50 \text{ kN/cm}^2$$

$$M_k = 650 \text{ kN.m}$$

$$V_k = 500 \text{ kN}$$

Valores constantes:

$$\gamma_c = \gamma_f = 1,4$$

$$\gamma_s = 1,15$$

a) Cálculo da linha neutra

Para  $f_{ck} \leq 50$  MPa, tem-se:

$$\alpha_c = 0,85$$

$$\lambda = 0,8$$

$$x = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 2 \cdot \left( \frac{M_d}{b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd}} \right)}}{\lambda} \Rightarrow \frac{0,81 \pm \sqrt{0,81^2 - 2 \cdot \left( \frac{650 \cdot 1,4}{0,3 \cdot 0,85 \cdot \left( \frac{20 \cdot 1000}{1,4} \right)} \right)}}{0,8} \cdot 100$$

$$x_1 = 51,80 \text{ cm}$$

$$x_2 = 150,70 \text{ cm}$$

Portanto:

$$x = \mathbf{51,80 \text{ cm}}$$

b) Cálculo de  $K_x$

$$K_x = \frac{x}{d} \Rightarrow \frac{51,80}{81} = \mathbf{0,64}$$

c) Verificação de ductilidade

$$K_x \leq 0,45 \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

$$0,64 > 0,45 \Rightarrow \mathbf{NÃO OK}$$

d) Domínio de deformação para aço CA-50

$$K_x < 0,259 \Rightarrow \text{domínio 2}$$

$$0,259 < K_x < 0,6283 \Rightarrow \text{domínio 3}$$



$$0,6283 < K_x < 1,0 \Rightarrow \text{domínio 4}$$

Como:

$$0,6283 < \mathbf{0,64} < 1,0 \Rightarrow \text{domínio 4}$$

e) Momento obtido impondo que a seção trabalhe no limite da ductilidade

$$\frac{x}{d} = 0,45 \text{ para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$$

$$M_{lim} = b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \lambda \cdot \left(\frac{x}{d}\right) \cdot d^2 \cdot \left(1 - 0,5 \cdot \lambda \cdot \left(\frac{x}{d}\right)\right)$$

$$M_{lim} = 0,30 \cdot 0,85 \cdot \frac{20 \cdot 1000}{1,4} \cdot 0,8 \cdot 0,45 \cdot 0,81^2 \cdot (1 - 0,5 \cdot 0,8 \cdot 0,45) = \mathbf{705,55 \text{ kN.m}}$$

f) Cálculo da área de aço

Como:

$$M_{lim} < M_d \Rightarrow 705,55 \text{ kN.m} < 650 \cdot 1,4 = 910,0 \text{ kN.m}$$

**Armadura dupla**

$$A_s = \frac{M_{lim}}{d - 0,5 \left(\frac{x}{d}\right) \cdot d \cdot \lambda \cdot f_{yd}} + \frac{M_d - M_{lim}}{(d - d') \cdot f_{yd}}$$

$$A_s = \frac{705,55}{(0,81 - 0,5 \cdot 0,45 \cdot 0,81 \cdot 0,8) \cdot \frac{50}{1,15}} + \frac{910,0 - 705,55}{(0,81 - (0,90 - 0,81)) \cdot \frac{50}{1,15}} = \mathbf{30,96 \text{ cm}^2}$$

$$A'_s = \frac{M_d - M_{lim}}{(d - d') \cdot f_{yd}} \Rightarrow \frac{910,0 - 705,55}{(0,81 - (0,90 - 0,81)) \cdot \frac{50}{1,15}} = \mathbf{6,53 \text{ cm}^2}$$

g) Taxa de armadura

$$\rho = \frac{A_s + A'_s}{A_c} \Rightarrow \frac{30,96 + 6,53}{30 \cdot 90} = \mathbf{1,39\%}$$

h) Armadura longitudinal mínima

Para  $f_{ck} \leq 50$  MPa, tem-se:

$$\rho_{min} \geq \begin{cases} \frac{0,078 \cdot f_{ck}^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{f_{yd}} = \frac{0,078 \cdot 20^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{\frac{50 \cdot 10}{1,15}} = 0,13218\% \\ 0,150\% \end{cases}$$

$$\rho_{min} = 0,150\%$$

$$A_{s,min} = \rho_{min} \cdot A_c \Rightarrow 0,150\% \cdot 30 \cdot 90 = \mathbf{4,05 \text{ cm}^2}$$

i) Armadura longitudinal máxima

$$A_{s,max} = 4\% \cdot A_c \Rightarrow 4\% \cdot 30 \cdot 90 = \mathbf{108,0 \text{ cm}^2}$$

j) Verificação da compressão diagonal do concreto

$$\frac{V_k \cdot \gamma_f}{b_w \cdot d} \leq 0,27 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \cdot f_{cd} \Rightarrow \frac{500 \cdot 1,4}{30 \cdot 81} \cdot 10 \leq 0,27 \cdot \left(1 - \frac{20}{250}\right) \cdot \frac{20}{1,4} \Rightarrow$$

$$2,88 \leq 3,55$$

Portanto não o esmagamento da biela.

l) Cálculo da armadura transversal

$$\tau_{SW} = \left(\frac{V_k \cdot \gamma_f}{b_w \cdot d}\right) - \left(0,6 \cdot 0,15 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow \left(\frac{500 \cdot 1,4}{30 \cdot 81} \cdot 10\right) - \left(0,6 \cdot 0,15 \cdot 20^{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow$$

$$\tau_{SW} = 2,88 - 0,6631 = 2,21$$

$$\rho_{sw,90} \geq \begin{cases} \frac{1,11 \cdot \tau_{sw}}{f_{ywd}} = \frac{1,11 \cdot 2,21}{\frac{50 \cdot 10}{1,15}} = 0,005642 \\ \frac{0,2 \cdot 0,3 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}}}{f_{ywk}} = \frac{0,2 \cdot 0,3 \cdot 20^{\frac{2}{3}}}{50 \cdot 10} = 0,0008842 \end{cases}$$

Logo:

$$\rho_{sw,90} = 0,005642$$

$$s \leq \begin{cases} \frac{2 \cdot \left(\pi \cdot \frac{\phi_e^2}{4}\right)}{\rho_{sw,90} \cdot b_w} = \frac{2 \cdot \left(\pi \cdot \frac{1,0^2}{4}\right)}{0,005642 \cdot 30} = 9,28 \text{ cm} \\ 20 \text{ cm} \end{cases}$$

$$s = 9,28 \text{ cm}$$

Portanto:

$$\phi \text{ 10,0 mm c/ 9,0 cm}$$

## 6) Viga 6

Dados da viga:

$$b_w = 30 \text{ cm}$$

$$f_{ck} = 55 \text{ MPa}$$

$$h = 70 \text{ cm}$$

$$CA \ 1 = 50 \text{ kN/cm}^2$$

$$c = 2,5 \text{ cm}$$

$$\phi_e = 9,5 \text{ mm}$$

$$d = 63 \text{ cm}$$

$$CA \ 2 = 60 \text{ kN/cm}^2$$

$$M_k = 1045 \text{ kN.m}$$

$$V_k = 500 \text{ kN}$$

Valores constantes:

$$\gamma_c = \gamma_f = 1,4$$

$$\gamma_s = 1,15$$

a) Cálculo da linha neutra

Para  $50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$ , tem-se:

$$\alpha_c = 0,85 \cdot \left[1,0 - \left(\frac{f_{ck} - 50}{200}\right)\right] \Rightarrow 0,85 \cdot \left[1,0 - \left(\frac{55 - 50}{200}\right)\right] = 0,829$$

$$\lambda = 0,8 - \left( \frac{f_{ck} - 50}{400} \right) \Rightarrow 0,8 - \left( \frac{55 - 50}{400} \right) = 0,788$$

$$x = \frac{d \pm \sqrt{d^2 - 2 \cdot \left( \frac{M_d}{b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd}} \right)}}{\lambda} \Rightarrow \frac{0,63 \pm \sqrt{0,63^2 - 2 \cdot \left( \frac{55 \cdot 1,4}{0,30 \cdot 0,829 \cdot \left( \frac{55 \cdot 1000}{1,4} \right)} \right)}}{0,788} \cdot 100$$

$$x_1 = 40,38 \text{ cm}$$

$$x_2 = 119,62 \text{ cm}$$

Portanto:

$$x = \mathbf{40,38 \text{ cm}}$$

b) Cálculo de  $K_x$

$$K_x = \frac{x}{d} \Rightarrow \frac{40,38}{63} = \mathbf{0,64}$$

c) Verificação de ductilidade

$$K_x \leq 0,35 \text{ para } 50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$$

$$0,64 > 0,35 \Rightarrow \mathbf{N\tilde{A}O \text{ OK}}$$

d) Domínio de deformação para aço CA-50

$$K_x < 0,259 \Rightarrow \text{domínio 2}$$

$$0,259 < K_x < 0,6283 \Rightarrow \text{domínio 3}$$

$$0,6283 < K_x < 1,0 \Rightarrow \text{domínio 4}$$

Como:

$$0,6283 < \mathbf{0,64} < 1,0 \Rightarrow \mathbf{domínio 4}$$

e) Momento obtido impondo que a seção trabalhe no limite da ductilidade

$$\frac{x}{d} = 0,35 \text{ para } 50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa}$$

$$M_{lim} = b_w \cdot \alpha_c \cdot f_{cd} \cdot \lambda \cdot \left(\frac{x}{d}\right) \cdot d^2 \cdot \left(1 - 0,5 \cdot \lambda \cdot \left(\frac{x}{d}\right)\right)$$

$$M_{lim} = 0,30 \cdot 0,829 \cdot \frac{55 \cdot 1000}{1,4} \cdot 0,788 \cdot 0,35 \cdot 0,63^2 \cdot (1 - 0,5 \cdot 0,788 \cdot 0,35) = \mathbf{921,26 \text{ kN} \cdot \text{m}}$$

f) Cálculo da área de aço

Como:

$$M_{lim} < M_d \Leftrightarrow 921,26 \text{ kN} \cdot \text{m} < 1045 \cdot 1,4 = 1463,0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

**Armadura dupla**

$$A_s = \frac{M_{lim}}{d - 0,5 \left(\frac{x}{d}\right) \cdot d \cdot \lambda \cdot f_{yd}} + \frac{M_d - M_{lim}}{(d - d') \cdot f_{yd}}$$

$$A_s = \frac{921,26}{(0,63 - 0,5 \cdot 0,35 \cdot 0,63 \cdot 0,788) \cdot \frac{50}{1,15}} + \frac{1463,0 - 921,26}{(0,63 - (0,70 - 0,63)) \cdot \frac{50}{1,15}} = \mathbf{61,26 \text{ cm}^2}$$

$$A'_s = \frac{M_d - M_{lim}}{(d - d') \cdot f_{yd}} \Leftrightarrow \frac{1463,0 - 921,26}{(0,63 - (0,70 - 0,63)) \cdot \frac{50}{1,15}} = \mathbf{22,25 \text{ cm}^2}$$

g) Taxa de armadura

$$\rho = \frac{A_s + A'_s}{A_c} \Leftrightarrow \frac{61,26 + 22,25}{30 \cdot 70} = 3,98\%$$

h) Armadura longitudinal mínima

Para  $f_{ck} \geq 50 \text{ MPa}$ , tem-se:

$$\rho_{min} \geq \begin{cases} \frac{0,5512 \cdot \ln(1 + 0,11 \cdot f_{ck})}{f_{yd}} = \frac{0,5512 \cdot \ln(1 + 0,11 \cdot 55)}{\frac{50 \cdot 10}{1,15}} = 0,2476\% \\ 0,150\% \end{cases}$$

$$\rho_{min} = 0,2476\%$$

$$A_{s,min} = \rho_{min} \cdot A_c \Rightarrow 0,2476\% \cdot 30 \cdot 70 = \mathbf{5,20 \text{ cm}^2}$$

i) Armadura longitudinal máxima

$$A_{s,max} = 4\% \cdot A_c \Rightarrow 4\% \cdot 30 \cdot 70 = \mathbf{84,0 \text{ cm}^2}$$

j) Verificação da compressão diagonal do concreto

$$\frac{V_k \cdot \gamma_f}{b_w \cdot d} \leq 0,27 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{250}\right) \cdot f_{cd} \Rightarrow \frac{500 \cdot 1,4}{30 \cdot 63} \cdot 10 \leq 0,27 \cdot \left(1 - \frac{55}{250}\right) \cdot \frac{55}{1,4} \Rightarrow$$

$$3,70 \leq 8,27$$

Portanto não o esmagamento da biela.

l) Cálculo da armadura transversal

$$\tau_{sw} = \left(\frac{V_k \cdot \gamma_f}{b_w \cdot d}\right) - \left(0,6 \cdot 0,15 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow \left(\frac{500 \cdot 1,4}{30 \cdot 63} \cdot 10\right) - \left(0,6 \cdot 0,15 \cdot 55^{\frac{2}{3}}\right) \Rightarrow$$

$$\tau_{sw} = 3,70 - 1,302 = 2,40$$

$$\rho_{sw,90} \geq \begin{cases} \frac{1,11 \cdot \tau_{sw}}{f_{ywd}} = \frac{1,11 \cdot 2,40}{\frac{50 \cdot 10}{1,15}} = 0,006127 \\ \frac{0,2 \cdot 0,3 \cdot f_{ck}^{\frac{2}{3}}}{f_{ywk}} = \frac{0,2 \cdot 0,3 \cdot 55^{\frac{2}{3}}}{60 \cdot 10} = 0,001446 \end{cases}$$

Logo:

$$\rho_{sw,90} = 0,006127$$

$$s \leq \begin{cases} \frac{2 \cdot \left(\pi \cdot \frac{\phi_s^2}{4}\right)}{\rho_{sw,90} \cdot b_w} = \frac{2 \cdot \left(\pi \cdot \frac{0,95^2}{4}\right)}{0,006127 \cdot 30} = 7,71 \text{ cm} \\ 20 \text{ cm} \end{cases}$$

$$s = 7,71 \text{ cm}$$

Portanto:

$$\mathbf{\varnothing 9,5 \text{ mm } c / 7,0 \text{ cm}}$$