

**INSTITUTO SUPERIOR DE EDUCAÇÃO
FACULDADE GUAIRACÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA**

MARCOS ANTONIO DE MORAES

MATEMÁTICA E A MÚSICA GREGA

GUARAPUAVA

2011

MARCOS ANTONIO DE MORAES

MATEMÁTICA E A MÚSICA GREGA

**Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
como requisito parcial para obtenção de título
no Curso de Licenciatura em Matemática, da
Faculdade Guairacá.**

MÁRCIA RICKLI

INSTITUTO SUPERIOR DE EDUCAÇÃO
FACULDADE GUAIRACÁ
LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

A COMISSÃO EXAMINADORA, ABAIXO ASSINADA, APROVA A
MONOGRAFIA DE CONCLUSÃO DO CURSO

MATEMÁTICA E A MÚSICA GREGA

ELABORADA POR:
“MARCOS ANTONIO DE MORAES”

COMISSÃO EXAMINADORA:

Professor/Títuloção/Nome do Professor

Professor/Títuloção/Nome do Professor

Professor/Títuloção/Nome do Professor

Guarapuava, _____ de _____ de _____.

Dedico esta pesquisa, aos amigos que acreditam na música como fonte de vida e harmonia, que buscam e dão valor ao que é agradável aos ouvidos.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, pois é Ele que nos capacita para compreendermos e nos da racionalidade para poder transmitir o que assimilamos.

Agradeço a minha família que sempre me apoiou, desde os primeiros passos no mundo da música, e agora neste caminho da matemática.

Aos professores do curso que dedicaram tempo importante de suas vidas no foco de estimular seus alunos na busca do conhecimento, também a professora Márcia Rickli, que me orientou também aos alunos colegas de classe, pelo companheirismo e amizade.

Agradeço aos que lendo este trabalho, disseminem a idéia e compreendam a importância da música no nosso mundo e saibam admirar a beleza da matemática.

“O fato mais incompreensível do Universo é que ele pode ser compreendido.”

Albert Einstein

RESUMO

O caminho seguido pela matemática grega através dos tempos teve uma trilha de harmonia e de valorização, os métodos que buscavam o conhecimento foram levados em consideração tendo preocupação com os titulares das descobertas. Foram considerados o princípio de dar méritos aos detentores do saber. Assim, também, como a arte da música tem acompanhado este desenvolvimento, é válido considerar que na busca da harmonia entre matéria, onde tudo tinha a razão e expressão de números, há também a necessidade de preencher o espírito, onde os números através da música, completa o universo em que vivemos nos tornando completos em nossa busca por paz. Culturas consideradas berços da humanidade, utilizam até nossos dias, a perfeição da Música como forma de justiça dentro da sociedade, e na razão intelectual e crescimento, dão maturidade a Matemática, onde sistemas governamentais e estruturas legislativas estão baseados nessas ciências. Os caminhos percorridos nesta progressão de conhecimento facilitam nosso entendimento nas perguntas, respostas e discussões, que buscavam os grandes filósofos da humanidade, em especial, Pitágoras, Platão e Aristóteles, considerados por muitos como “Pais do conhecimento” por suas pesquisas, diálogos e grandes legados deixados por suas escolas.

Palavras-chave: Matemática, Música, Harmonia.

ABSTRACT

MATHEMATICS AND MUSIC GREEK

The path followed by the Greek mathematics through the ages had a trail of harmony and valorization, were the methods that sought the knowledge taken into consideration with concern for the holders of the findings? Were they considered the principle of giving merit to the holders of knowledge? Therefore, as the art of music have been accompanying this development, it is worth considering that in the quest for harmony between substance, where it had all the reason and expression of numbers, there is also a need to fill the spirit, where the numbers through music fills the universe we live in makes us whole in our search for peace. Cultures considered the cradles of humanity use this until these days, the music perfection as a form of justice in our society, and intellectual reason and growth, give maturity to the Math, where government systems and legislative frameworks are based on these sciences. The paths in this progression of knowledge facilitates our understanding in questions, answers and discussions, that sought out the great philosophers of humanity, in particular, Pythagoras, Plato and Aristotle, considered by many as "Parents of knowledge" for its research, dialogues and large legacy left by their schools.

Key-words: Mathematics; Music; Harmony

LISTA DE FIGURAS

Plimpton 322.....	26
Figura 1	38
Metrônomo.....	39
Figura 2	39
Figura 3	41
Figura 4	45
Figura 5	45
Figura 6	46
Figura 7	48
Figura 8	49

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	47
Tabela 2	57

SUMÁRIO

RESUMO.....	
1 INTRODUÇÃO.....	13
2 A MATEMÁTICA DA ANTIGUIDADE À ATUALIDADE.....	16
2.1 Origens.....	16
2.2 Representar a contagem.....	17
2.3 A evolução da simbologia.....	18
3 A MATEMÁTICA GREGA.....	21
3.1 Matemática Grega.....	21
3.2 Pitágoras e a ordem pitagórica.....	24
3.3 Platão.....	28
3.4 Aristóteles.....	32
4 A MÚSICA E SUA HISTÓRIA.....	35
4.1 Origens.....	35
4.2 Sistematização da Música.....	36
4.2.1 Qualidades do som e os elementos da música.....	37
4.2.2 Altura.....	42
4.3 Platão.....	50
4.4 Aristóteles.....	51
5 A COMUNHÃO DAS ARTES.....	52
5.1 Busca por conhecimento.....	52
5.2 Currículo musical.....	55
5.3 Educação “perfeita”.....	55
5.4 A música como regra.....	58

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	60
REFERÊNCIAS.....	

INTRODUÇÃO

O ponto determinante para matemática ou mais precisamente para os números foi que os gregos registram seus conhecimentos e suas pesquisas nos murais da história. Sabemos que grande parte das descobertas gregas na verdade, foi buscada ou adquirida em outras e civilizações dominantes ou dominadas pela guerra. Isso na verdade foi o ponto fundamental para a disseminação da matemática e suas fórmulas “mágicas”, bem como a otimização de conhecimento.

Os grandes sábios do período histórico em que vamos detalhar nesta pesquisa viajaram muito pelos povos vizinhos, tiveram contato com várias maneiras de entender matemática.

As fórmulas, os métodos e até mesmo os símbolos numéricos matemáticos ou geométricos vêm de uma miscigenação cultural grande, porém nosso foco vai ser exatamente a Matemática Grega do século V a.C. até o século III a.C.

Nesse período, vemos o surgimento das escolas, onde mestres e aprendizes passavam anos, vidas inteiras, juntos estudando e debatendo sobre o conhecimento. Buscavam desafiar-se a si mesmos com conceitos e deduções para que se obtivessem teoremas concretos. Isso proporcionou um grande salto em todas as áreas de estudo da época, dentre elas na matemática, que ainda engatinhava no universo do conhecimento, e cresceu de maneira ágil e harmoniosa. Então houve a necessidade de documentar, agrupar e principalmente de padronizar conceitos e símbolos.

A busca por conhecimento abriu horizontes na mente humana, o que trouxe à tona perguntas sem respostas, como por exemplo, “como e o que é perfeito? O que é palpável e o que é imaginário? A busca por compreender o universo chegou o tal ponto de se dizer que “tudo é número”¹, ou que, nada é o que realmente pensa que é, sugere apenas a ideia de ser”.

A forma de encontrar a tal perfeição teve em seu ápice da discussão que, para o homem no mundo real é impossível ser perfeito, cabe esta qualidade apenas à alma, ou seja, no mundo real, mutável, não se pode confiar, não há justiça, apenas em um nível superior, o da alma imutável, o homem encontra a perfeição justa.

Daí, o papel principal na harmonização da razão com a alma. Coube então à Música, em seu caráter de moldar a alma do homem na bondade e na justiça. A música com sua harmonia perfeita traz clareza ao desenvolvimento do homem como ser social, político e justo.

Percorrendo os caminhos históricos da Matemática como ciência, vemos que o crescimento do intelecto, a sobrevivência como espécie seria quase que na linha do impossível, se homens sábios não tivessem dado o devido valor e a atenção exigida no nível de profundidade que é a ramificação matemática.

Notamos que, para equilibrar este ócio na busca do conhecimento, o homem encontrou na música a harmonia da alma e da razão, onde sistemas de governar, de moldar se tornaram estruturas baseadas em escalas perfeitas.

Conhecimento passado de geração para geração por currículos escolares ou simplesmente por culturas que, sabiamente conhecem que tamanha é

¹ Os Pitagóricos acreditavam que a natureza podia ser entendida por meio da matemática. (BOYER, 2003, p.38).

a importância do homem social justo, no mundo real, e por isso colocam a música em um mesmo parâmetro da matemática, sendo exigidas como princípios básicos de vida, pilstras de sociedades e sinônimos de bondade e justiça.

Busquemos nos aprofundar mais neste universo de diálogos e discussões, participando com Platão, Aristóteles e, no final, talvez, até colaborar com essa sociedade chamada de “os pitagóricos”.

2 A MATEMÁTICA DA ANTIGUIDADE À ATUALIDADE

Todas as coisas que podem ser conhecidas têm números; pois não é possível que sem número qualquer coisa possa ser concebida ou conhecida.

Filolau

2.1 Origens

Há muitos séculos, quanto a Matemática ainda balbuciava o despertar, a humanidade já contava suas coisas em uma organização caseira ou apenas por inconsciência do saber, onde não havia números, formas ou tamanhos, mas separavam coisas por igualdade, por comparações e também por diferenças.

Nesse sistema rudimentar de contagens, a humanidade nasceu trazendo consigo a necessidade de melhorar a forma de contagem, relações e formas dos ambientes que a rodeavam. A matemática então *despertou* como parte da vida da humanidade, de sobrevivência e desenvolvimento.

As dificuldades em organizar coisas, relacionar, foram o ponto de partida para que se pensasse em alguma forma de contar e poder transmitir essa contagem.

Na antiguidade não havia uma forma definida para relacionar coisas, então se começou a buscar formas de identificar objetos e grupos por semelhanças ou por diferenças. Temos então, que se desenvolveu o “juntar” coisas, porém sem ter uma simbologia para registrar, todo trabalho tornava-se efêmero, sem objetividade concreta.

A percepção dessa necessidade ocorreu gradualmente por séculos. A observação passada por gerações e o conhecimento, adquirido através de convívios entre povos, foi exigindo que se procurasse uma maneira de orientar a contagem.

2. 2 Representar a contagem

Sabemos, através de registros diversos que esse conceito de contagem na antiguidade era realizado somente 1 (um) e 2 (dois), o que passava desse valor, dessa quantidade, era então chamado de muitos. Também foi constatado em várias tribos e línguas, que a contagem então sugeria grupos de ímpar e par.

No clarear das descobertas, começou-se a utilizar os dedos para contar, surgindo então os conjuntos de dois, três, quatro e cinco, usando também as duas mãos para representar conjunto de dez objetos. O número um (1), não representava um conjunto. Também usavam pedrinhas para indicar quantidades ou elementos de conjuntos variados, geralmente associados aos dedos das mãos e pés. Posteriormente começou a ser difundido o sistema quinario e decimal entre as civilizações, usando os dedos do corpo humano, a associação de objetos representados em coleções de cinco, dez ou vinte elementos correspondentes.

O sistema decimal, surgido por conveniência da anatomia humana, logo sobressaiu ao sistema de contagem de um, dois ou muitos, agrupando já numa maneira até que quase sem preconceitos do saber, em pedras os conjuntos então contados. Notadamente observamos que logo se tornou ineficaz, pois não era confiável e nem satisfatório o registro das informações.

O homem por ser de natureza adaptável, apesar do nosso reconhecimento que foi essa facilidade de adaptar-se aos ambientes que nos permitiu sobrepujar aos demais seres vivos, evoluiu.

Com uma nova forma de registro com o qual poderia ser feito e comparado como uma espécie de contrato, em que principalmente nas negociações, ambos os negociantes tinham os mesmos registros, iniciaram então os registros em bastões ou osso com marcas simbolizando cada elemento ou conjunto.

2.3 A evolução da simbologia.

Vemos que “símbolos” indicando quantidade, provavelmente surgiram antes que as palavras que transmitem a ideia, conforme citou Carl B. Boyer no livro *História da Matemática (1996)*, “pois é mais fácil fazer incisões num bastão do que estabelecer uma frase bem modulada para identificar um número”.

A linguagem falada dos números surgiu de coleções concretas, como indicar medidas usando partes do corpo humano, devido a facilidade de comparação e também por serem habituais em expressões e comparações, termos como por exemplo: palmo, braço, pés e outras partes menos usadas.

As contribuições dessas frases, ou seja, dos nomes com referência ao corpo humano, vêm até nossos dias e certas culturas utilizam esses termos como razão de medidas. Em algumas situações ainda é possível perceber que a linguagem oficial numérica é a de termos referenciados ao corpo humano.

O mundo aprendeu, aos poucos, as definições de contar e calcular. O progresso foi lento e temos poucos registros de quem foi o autor de cada definição, mas vale ressaltar a inteligência fora do comum de homens considerados mestres e

sábios que, mesmo sem material adequado e equipamentos que auxiliassem em suas conquistas, deram grandes bases estruturais para a matemática moderna.

Os padrões de sinais para corresponder aos números, na medida em que o mundo civilizado crescia, foi disseminando-se pelas civilizações, diante das conquistas de guerras, do comércio crescente da Ásia, Índia, África e Europa, dos reinos que dominavam os períodos inserindo sua cultura aos povos conquistados, aperfeiçoando a simbologia na medida em que, a praticidade era exigida, as facilidades comprovadas e aprovadas, tornaram-se evidente que padrões comuns, facilitando o relacionamento social, comercial e ainda prematuro, a educação como ensino e aprendizagem.

Boyer continua em suas citações nos dando luz a questões em que as soluções nem sempre apresentavam de modo concreto ou prático o resultado. Os babilônios, por exemplo, obtiveram muito sucesso com a Geometria, mas encontraram dificuldades em representar o número “0” (zero), “os babilônios parecem a principio não ter tido um modo claro de indicar uma posição “vazia” – isto é, não tinham o símbolo zero, embora às vezes deixassem um espaço vazio para indicar o zero.” (BOYER, 2003, p.18).

Embora o mundo predominante em conhecimento da época, os babilônicos, com o formidável valor em construir obras grandiosas, como os egípcios que utilizavam a matemática mais para a praticidade do que para o conhecimento filosófico, também encontraram suas barreiras matemáticas que, por capricho, e apenas por pura democracia matemática, se é que assim podemos dizer, foi distribuído este desenvolvimento ou aprimoramento do número “0” em especial à outras civilizações.

Fato interessante que se deve registrar é que a evolução matemática no período em que vamos discorrer nesta pesquisa, que vai ser exatamente a matemática grega do século V a.C. até o século III a.C., é um dos períodos mais bem sucedidos, grande parte do conhecimento atual e dos conceitos atuais, estão já pré-definidos desde o período em evidência, apenas agora estão lapidados, mas com um horizonte brilhante ainda por descobrir.

3 A MATEMÁTICA GREGA

3.1 Matemática Grega

No processo do desenvolvimento matemático os Gregos tiveram o papel principal, pois tiveram os primeiros contatos com o Oriente Médio e logo se interessaram pela beleza da geometria² e sua utilidade.

A civilização Grega teve origem em uma civilização misteriosa chamada minóica que dominava a escrita e a leitura cerca de 1700 a.C. Na Grécia continental viram os micênios, um povo mais guerreiro. Cerca de 1200 a.C. esses povos foram invadidos pelos dórios, bárbaros vindos da Ásia, que se instalaram nas terras conquistadas e adotaram a agricultura como força comercial e social.

A escrita foi reintroduzida no mundo grego pelos povos do Oriente médio, pois logo depois da conquista pelos bárbaros, os ensinamentos da escrita dos moradores antigos, os minóicas e micênicas deixaram de existir. Por longo período a civilização grega passou despercebida do conhecimento formal, o que foi compensado no período seguinte da história grega, a partir de 500 a.C., um período notável da história.

Grandes Matemáticos surgiram desse período, a partir de 600 a.C., período que tomaremos como base para nosso trabalho.

Em particular é importante ressaltar o propulsor da matemática como ciência, Tales de Mileto, não nos aprofundaremos em seu histórico, mas nem por isso deixaremos de considerar sua importância. Tales o primeiro grande sábio da

² Palavra de origem Grega que significa **Medida da terra**. Disponível em: <<http://www.somatematica.com.br/geometria.php>>

Grécia, o qual não era matemático profissional, mas por ser um rico comerciante teve oportunidades ímpares de estudar e se dedicar aos conhecimentos da época por puro prazer, depois de ter passeado pelo Egito e a Babilônia, trouxe o conhecimento da Geometria do Oriente. Tales, através de seu conceito que “as verdades matemáticas devem ser demonstradas”, conseguiu provar vários teoremas, todos ramificados da geometria, como: ângulos, círculos, semicírculos, segmentos e paralelas.

Alguns resultados fundamentais da geometria foram atribuídos a Tales, resultados que para nós hoje parecem tão elementares, mas que num período em que o homem não questionava o “porquê”, foi de grande incentivo ao novo caminho em que a matemática estava percorrendo, “[...]a ele devemos a primeira profunda transformação pela qual passou o pensamento matemático desde que o homem aprendera a contar.” (GARBI, 1996, p. 15)

E ainda segundo Garbi (1996), os resultados mais expressivos que Tales obteve foram:

- a) Qualquer diâmetro efetua a bissecção do círculo em que é traçado.
- b) Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.
- c) Ângulos opostos pelo vértice são iguais.
- d) Se dois triângulos têm dois ângulos e um lado em cada um deles respectivamente iguais, então esses triângulos são iguais.
- e) Um ângulo inscrito num semicírculo é reto.

Muitas dessas informações sobre as demonstrações e os passos que se seguiram por séculos da matemática grega devem-se, à tradição com que foram contados os relatos históricos, já que os trabalhos se perderam no tempo, apenas fragmentos de relatos e alusões são encontrados quase um milênio depois.

A principal fonte de informações a respeito é o chamado “Sumario Eudemiano” de Proclo, que consta nas páginas de abertura do “Comentário sobre Euclides”, Livro I, de Proclo, por volta do século V d.C.. Este trabalho relata uma história aparente da geometria grega escrita por Eudemo, discípulo de Aristóteles.

Somos forçados a nos apoiar em manuscritos e relatos escritos vários séculos depois de os originais terem sido produzidos. Porém, a despeito dessa dificuldade, não faltam sábios especializados na cultura clássica para construir uma descrição bastante consistente, embora algo hipotética, da história da matemática grega primitiva, e para restaurar de maneira bastante plausível muitos dos textos originais gregos. (EVES, 2004, p. 96)

Na era primitiva havia distinção entre o uso prático dos números e forma de contar. Ou seja, da forma abstrata das relações numéricas e a arte dos números como prática de calcular. A utilização dos números na vida cotidiana dos gregos era chamada então de *Logística*³, já a prática, como arte dos números era chamada de *Aritmética*.

Ainda num esboço dos registros comentados de alguns escritores séculos depois, vamos visitar as demonstrações e descobertas realizadas pelos grandes mestres da matemática, viajar pelos séculos históricos que tiveram o privilégio de assistir e assimilar esta maravilha dos acontecimentos matemáticos, depois de Tales cerca de 600 a.C., o qual apenas foi mencionado neste trabalho, para se ter o período de início e esboçar melhor o decorrer dos fatos, mas que não é tema para o conteúdo desejado. Conheceremos então os matemáticos afins estudados e comentados. Iniciaremos por Pitágoras e sua escola, “Os Pitagóricos” cerca de 540 a.C. com suas idéias e conceitos filosóficos matemáticos. Também

³ Comum até nossos dias em alguns países desenvolvidos, toda arte da matemática é conhecida como logística.

apreciaremos Platão cerca de 430 a.C. e seus diálogos e conheceremos a Aristóteles cerca de 340 a.C. com suas refutações aos “entes matemáticos”, observando a importância da matemática, dados ao conhecimento geral da filosofia, abrangendo, também, as exigências do conhecimento musical como parte dessa formação.

3.2 Pitágoras e a Ordem Pitagórica

Assim como toda história da matemática grega, há toda uma neblina envolvendo outro grande personagem da matemática, Pitágoras está, sem dúvida, no maior pedestal de contradições e linhas divergentes de estudiosos, numa visão clara de desenvolvimento. Isto é positivo e inegável, somente pelo fato de que mesmo sem ter a certeza ou registros concretos, são atribuídas várias demonstrações a ele mas isso, na verdade, vem tornar nosso fascínio por tão ilustre cidadão do mundo matemático ainda mais deslumbrado.

Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C. numa ilha em Samos. Há divergências sobre Pitágoras ter sido discípulo de Tales, pois este tinha meio século de diferença de idade, mas morava perto de Mileto, onde Tales vivia.

Pitágoras viveu algum tempo também no Egito e é bem possível que tenha viajado a lugares mais distantes. Pitágoras morreu com mais de 80 anos em Metaponto, no sul da Itália, depois de se refugiar das rebeliões populares que intentavam assassiná-lo.

O teorema mais famoso da matemática é conhecido com o sendo de Pitágoras, pelo menos é atribuído a ele esta demonstração, que é o teorema do triângulo retângulo de lados 3, 4 e 5 a relação entre a hipotenusa e catetos, muito

popular em todas as esferas de ensino. A demonstração é $a^2 = b^2 + c^2$, a é a hipotenusa e b e c são os catetos do triângulo.

É sabido que os babilônios e chineses já conheciam essa propriedade há muitos séculos e que Pitágoras trouxe esse conhecimento do Egito, observando os escribas e engenheiros da época, que faziam suas construções baseadas nesses conhecimentos de ângulos e observando que as divisões das terras para agricultura, também se davam por usar tais propriedades.

No Egito, em torno do rio Nilo, as terras eram as mais produtivas, onde a força do comércio da época era agricultura, então o Nilo conhecido também por suas enchentes periódicas, obrigava a novas demarcações de terra toda vez que ocorria a enchente, os engenheiros egípcios então usavam o famoso método da corda com 11 nós. Uma corda era dividida em 12 partes iguais e 11 nós de igual distância entre si, um escravo segurava no primeiro nó, outro escravo esticava a corda e segurava no terceiro nó, outro escravo segurava então no quarto nó subsequente, o último unia o quinto nó seguinte ao primeiro formando um triângulo reto, ou seja, com um ângulo de 90 graus.

Encontramos registro de utilização do termo chamado *termo primitivo pitagórico* em tábuas babilônicas do período antigo, de entre aproximadamente 1900 e 1600 a.C. conhecida como *Plimpton 322*, da coleção da G.A. Plimpton da Universidade de Colúmbia. A tábua possui colunas com números que foram descritos pela primeira vez em 1945, por Neugebauer e Sachs. Seus conteúdos indicam claramente que são hipotenusa e cateto de triângulos retângulos de lados inteiros.

Constatou-se que os símbolos encontrados na tábua eram apenas para registro prático, não havia um estudo sobre o teorema, isso contribui para que

diversas linhas de pensadores estudiosos, ou atribuíram a Pitágoras apropriação de conhecimento alheio. Mas daí se dá a beleza do passo dado por Pitágoras um milênio depois, ele apenas nos deixou como herança a escrita do mais belo e simples teorema conhecido até mesmo por leigos matemáticos.



Plimpton 322 (Universidade de Colúmbia)
FONTE:⁴

Biografias de Pitágoras foram escritas nos tempos da antiguidade, mas todas se perderam no tempo, o que temos são registros de uma ordem formada por ele em Crotona, no sul da Itália atual, conhecida também com irmandade, os “Pitagóricos”. É uma sociedade secreta, obscura e comunitária, em que se prestavam cultos e rituais secretos. O sistema rígido e de uma conduta conservadora, motivou a união de seus membros pelo ideal de vida e estudo, principalmente da Filosofia e Matemática, “as próprias palavras “filosofia” (ou “amor

⁴ disponível em: <<http://laquesigueaquiblogspot.com/2010/06/la-tablilla-plimpton-322.html>>

a sabedoria”) e matemática (ou “o que é aprendido”) supõe-se terem sido criadas pelo próprio Pitágoras para descrever suas atividades intelectuais.” (BOYER, 1996, p. 33)

Em poucos anos, os pitagóricos se espalharam pelo mundo grego, causando temor no meio político. Naturalmente uma sociedade secreta coesa em fundamentações e tendências influenciava o mundo contemporâneo, provocando revolta da população, que, frequentemente, destruía seus prédios, fazendo com que se dispersassem.

Há relatos de que a sociedade dos pitagóricos perdurou por quase três séculos. Seus esforços constavam em estudos na suposição de que os números inteiros são o resultado de tudo, ou seja, as características da matéria são os números inteiros. Conhecido o grupo de matérias que a escola estudava como *quadrivium*, que constava de geometria, música, astronomia e as propriedades dos números, formava a base conhecida da matemática pitagórica. Também tinha o *trivium* na estrutura filosófica que se dividia em gramática, lógica e retórica.

Todo conhecimento básico da época considerado por muitos como cultura da educação era passado oralmente entre os membros da irmandade em níveis diferentes de discipulado, mas todas as descobertas, como de costume na época, eram creditadas ao líder ou mestre.

Todo processo de numeração antes conhecido era apenas para fins puramente operacionais, ou seja, tinha um papel concreto na utilização, somente para fins práticos. Os pitagóricos abrangem essa numeração de uma forma diferente, como filosofia de vida, de uma maneira a se estudar e olhar a beleza dos números, há créditos dessa transformação de visão dados a Tales, mas preferimos ficar com o que opinou Eudeno e Proclo, de que a tradição de visão referente aos

números foi moldada pelos pitagóricos. “Mesmo que não aceitemos essa afirmação totalmente, é evidente que os pitagóricos desempenharam um papel importante, talvez o crucial, na história da matemática.” (BOYER, 1996, p. 33)

Pitágoras foi um dos personagens mais influentes da história matemática, divisor de águas do conhecimento, talvez não do conhecimento literalmente, mas da maneira de olhar o conhecimento. A matemática para Pitágoras se relacionava com estilo de vida, estrutura de vida, amor e respeito pela natureza como matéria, seus seguidores comungavam desta mesma filosofia.

A contribuição dos pitagóricos para o mundo matemático foi essencial, foi essa inspiração que tomou conta do mundo histórico, fazendo grandes descobertas pelo puro prazer do conhecimento, sem preocupações práticas, como a arte de uma pessoa culta educacionalmente.

“Os pitagóricos foram dos primeiros a acreditar que as operações da natureza podiam ser entendidas por meio da matemática.” (BOYER, 2003, p.38). O misticismo pitagórico foi impressionante, chegaram à conclusão de que tudo era números, atribuíram significados que para nós hoje são lógicos, por exemplo, o conhecido como “número quaternário”, a adição dos números: $1+2+3+4 = 10$, os pitagóricos acreditavam que os números eram o fundamento das coisas, até mesmo a harmonia do universo, das coisas palpáveis e as não palpáveis, as proporções, os parâmetros congruentes da natureza, tudo era matemática,

3.3 Platão

Nascido em Atena no ano de 428\427 a.C., descendente de uma família de classe social alta, Platão viveu num período de transição, o fim do império

ateniense, seguramente Platão recebeu toda educação destinada aos jovens de sua classe social, ligadas muito diretamente a poesia e a música, desenvolvendo o aprimoramento físico através da ginástica, no convívio familiar seguro, teve alto nível de assimilação cultural da época e contatos com filósofos e mestres do reino. É provável que aos vinte anos tenha freqüentado os círculos de Sócrates, já com o pensamento de aprimorar seus conhecimentos.

Após a morte de Sócrates, iniciou-se um período de viagens de Platão, conhecendo novos filósofos e participando de pesquisas. Esteve em Megara, em Cirene ao Norte da África, na Sicília teve contato com a famosa escola Pitagórica, mais precisamente com o Matemático Arquitas de Tarento (428-347 a. C.), que também tinha grande influência política. Essa relação teve influência mútua, com o desenvolver fecundo de Platão nos seus propósitos.

Platão teve contatos próximos com outros filósofos da época, que quero aqui apenas registrar para fins de conhecimento, dentre eles esta Heráclito de Éfeso, Parmênides, do Sul da Itália, alguns Pitagóricos e seu mentor Sócrates foram às principais influências.

Fundador da Academia em Atenas, juntamente com, Sócrates, foi considerada por muitos, até os dias atuais, como a primeira instituição de educação superior do mundo ocidental, também autor de diversos diálogos filosóficos. Em sua escola Platão desenvolveu a conhecida *Teoria das Ideias* ou *Teoria das Formas*, que significa em termos gerais que o homem está em contato permanente com dois tipos de realidade: a inteligível e a sensível. É conhecido que “Seu mérito repousa

na enorme influência que exerceu como entusiasta pelo estudo dessa ciência, “quem não é geômetra não entre!” (BARBOSA, 2010, p. 1)⁵

Platão em os *Diálogos* trouxe a compreensível diferença entre o *sensível* dos pitagóricos que tudo era números e só podia ser compreendido pelos números e o *inteligível* na sua *Idéia*, o destaque que nos deixa claro em suas obras e nos dá compreensão da importância dos escritos Platônicos é que “Ao mesmo tempo em que carregava todo peso da tradição oral que lhe fora legada por Sócrates e por Pitágoras, Platão procurava, como escritor, evitar o tratamento rígido e sistemático dos seus antecessores naturalistas e também a retórica de seus contemporâneos sofistas.” (BARBOSA, 2010, p. 13), em sua essência Platão buscava descobrir a verdade das coisas, uma realidade além do físico, buscava uma verdade que vem do conhecimento não nas coisas, mas do além delas.

Para Platão a Matemática era a ciência do *Bem*, que elevava a alma com seus métodos e raciocínio lógicos e rigorosos, na hipótese de elevar a alma as alturas na doutrina das idéias, por isso era importante o estudo da matemática, na formação do intelecto voltado para o bem.

A importância de Platão na matemática foi que a exegese do conhecimento passava pela matemática, para poder compreender os porquês, tanto da alma como do corpo, Platão dava extrema importância para a harmonia entre ambas. Em seus escritos observamos que através da matemática se moldava o intelecto do homem, onde podia se conhecer e conhecer seu lugar através da teoria da *idéia*.

Não há um conhecimento técnico da matemática com a assinatura de Platão que seja digno de nota, mas sua importância se deve pelo entusiasmo com

⁵ Doutorado em Educação Matemática – UNESP, *Campus* de Rio Claro, SP.

que tratou a matemática, pela inspiração que desenvolveu em sua escola, abrindo campo de estudo para outros matemáticos, e porque não dizer, como pai criador de matemáticos, título que é dado por muitos estudiosos até nossos dias.

A admiração pela matemática foi influência de seu grande amigo Arquitas de Tarento, considerado um dos últimos pitagóricos, pouco sabemos sobre Arquitas, pelos registros que se perderam. O que temos estão descritos por diálogos, referências de outros grandes matemáticos e filósofos posteriores a Arquitas, que também é considerado como o principal colaborador no desenvolvimento da escala musical, através dos cálculos de proporção, tema que veremos no próximo capítulo.

Platão, como já citamos, teve grande influência na matemática por sua inspiração a outros matemáticos, mas também foi responsável por definir ou diferenciar os ramos da matemática, fez uma distinção clara entre a aritmética e a logística, definindo como a aritmética como a teoria dos números, destinada aos filósofos como fonte de conhecimento, e a logística, como técnica da computação, destinada ao conhecimento dos comerciantes, guerreiros, ou seja, a matemática do dia a dia.

Na exegese dos escritos de Platão vemos sua busca pela verdade, porém no contexto geral podemos ver que a resposta da hipótese está comprovada através da aritmética e geometria como harmonia das coisas, “a aritmética tem um efeito muito grande de elevar a mente, compelindo-a a raciocinar sobre o número abstrato”. (BOYER, 1996, p. 54).

Ainda há disputas acirradas sobre a importância de Platão no desenvolvimento matemático, o que não podemos negar é que sua escola tornou-se o maior centro de matemáticos do mundo, de onde surgiram grandes nomes,

excepcionais mestres em matemática, com suas pesquisas, teoremas e axiomas, proporcionaram um grande salto a matemática que conhecemos, por indução sobre os frequentadores da escola ou apenas por fixação a beleza da matemática, Platão merece ser elevado na sua importância como um dos grandes Mestres da Matemática.

3.4 Aristóteles

Nasceu em Estagira, na Calcídica, em 384 a. C., viveu em Atenas e estudou na *Academia* de Platão entre 367 e 347. Após a morte do mestre, ficou três anos em Atarneus. Em 345 foi para Mitilene, em Lesbos, onde, ao lado de Teofrasto, realizou a maior parte de suas famosas investigações biológicas. Em 343 aceitou tornar-se preceptor de Alexandre, filho de Felipe II, viveu em Pela, na corte macedônica, até 335, quando Alexandre subiu ao trono.

Aristóteles conhecido por diversos atributos, entre ele “Príncipe dos Filósofos”, apesar de não ter nascido em Atenas, teve uma vida regada e privilegiada, por causa da proximidade familiar com a realeza, aos 17 anos iniciou seus estudos com Platão e em 336 a.C. fundou sua própria academia em Atenas, conhecida como *Liceu*, por ensinar enquanto caminhavam, seus discípulos ficaram conhecidos como *Peripatéticos*, que quer dizer “os que passeiam”.

Aristóteles não concordava com as teorias de seu mentor Platão, a respeito do conceito da Idéia, em seus escritos fazem diversas referências refutando esta teoria, no conjunto de escritos denominado mais tarde como *Metafísica*, que

não é um termo Aristotélico, vemos que Aristóteles não acrescenta grandes novidades, mas sim, interpreta os ditos por ente matemáticos, “Em diversos trechos da *Metafísica* Aristóteles sustenta que “alguns dizem”, “dizem””, (BARBOSA, 2010, p. 8), portanto há diversas interpretações nas refutações e que deve ser analisadas com extrema segurança e embasamento histórico, o que não vem ao contexto agora.

Apesar de Aristóteles reunir seus pensamentos em um só lugar, nos escritos conhecido como *Metafísica*, assim como seu mestre, não nos deixou um tratado final, dando a seus escritos diversas interpretações causando dúvidas, até mesmo, na autenticidade dos escritos.

Está claro que precisamente o tratado reunido *Metafísica*, é uma contestação ao Platonismo e outros filósofos matemáticos contemporâneos, justamente por não haver um consenso quanto ao ponto de partida ou por haver divergência entre as buscas do conhecimento, porém, Aristóteles também formula sua concepção, “O ponto de partida de Aristóteles é sua convicção de que não é possível descrever os objetos físicos matematicamente” (BARBOSA, 2010, p. 10), organizando a maneira de pensar logicamente e racionalmente, diferente de seus antecessores que abstraíram exageradamente a matemática no âmbito do *sensível* ou da *ideia*.

Aristóteles com sua personalidade característica de agrupar ou reunir coisas por caracteres específicos, contribuiu com deslumbre para a matemática, mesmo com uma tendência voltada para a *palavra* como retórica, que considerava uma das mais distintas virtudes do homem.

Na filosofia criou a lógica *formal* e a lógica *material*, pois norteava princípios ao comportamento humano, tanto na ética como na política, “Aristóteles

estudou, ordenou, classificou e escreveu a respeito de toda a ciência e toda a filosofia antiga.”⁶

Por frustrações de ego, Aristóteles não quis acompanhar os matemáticos da época, quando na morte de seu mentor Platão, achava ele que estava mais preparado para assumir a escola platônica, o que não aconteceu, então resolveu se distanciar e fundou sua própria escola, porém, buscou estar inteirado das discussões e controvérsias, muitas delas por ele mesmo provocada.

Não teve um trabalho decisivo no âmbito técnico da matemática, mas contribuiu para escrever as análises adquiridas em suas definições, bem como por a prova hipóteses das abstrações matemáticas.

Registrar teoremas e tratar, dentro da filosofia, a matemática como fundamental para o conhecimento em seus diversos ramos, foi fundamental para a exteriorização da matemática para os leigos, a partir do mundo dos estudiosos, definindo inclusive como regra essencial e indispensável para o crescimento humano social, político e ético.

Podemos ver que a matemática aristotélica, era fonte vital para o bom desenvolvimento social.

Suas teorias, retóricas e hipóteses influenciaram os estudos do direito, política, poesia e o próprio desenvolvimento moldável da personalidade humana.

⁶ disponível em < <http://greciantiga.org/arquivo.asp?num=0422> >

4 A MÚSICA E SUA HISTÓRIA

4.1 Origens

A palavra “música” vem do grego “musiké téchne”, que deriva das “nove musas”, filhas de Zeus e de “Mnemósine”, a “memória” deusa inspiradora da arte. Através de uma sucessão de sons, longos ou curtos, com intensidade forte ou fraca, a música é considerada como uma arte, mais precisamente como expressão do corpo e da alma.

Não é possível identificar nos registros, o tempo em que surgiu a música, nem mesmo definir o que tem sucessão, o canto vocal, instrumental ou sons de percussão. O que é certo que desde que o homem descobriu como fazer sons com pedaços de madeira, pedras, batidas com bastão, a música nasceu e evoluiu através dos tempos, ganhou nomes, definições, fórmulas e lugar especial no desenvolvimento humano.

Vemos figuras em cavernas de sítios arqueológicos, que são identificadas como música e podemos ver expressões corporais, que representam gritos, figuras que nos mostram instrumentos musicais, fragmentos que parecem dança e canto em movimento.

As primeiras civilizações que encontramos a música se estabeleceram na região da Ásia Central, vemos que é muito rica em representações musicais, pratica relacionada geralmente a religião, guerras, festas e até mesmo como força política, sempre ligada à evolução da humanidade, buscando divindades, relacionando a seres superiores, elevando o poder e a autoridade da arte.

A Música que conhecemos hoje é constituída basicamente de algumas características definidas como; duração do som, altura, intensidade e timbre, tudo isso articulando-se entre si criando diversos ritmos, melodias e harmonia.

Esses elementos são perceptíveis aos ouvidos humanos, uma combinação de sons entremeados por períodos de silencio, organizados por um determinado tempo, conforme parafraseou Dantas.⁷

4.2 Sistematização da Música

A sistematização da música aconteceu na Grécia antiga, então nos familiarizaremos com as propriedades da música para compreendermos melhor o contexto desta pesquisa, que tem como objetivos; trazer as formas de musica, e educar nossos ouvidos para o que é agradável.

Dantas em seu livro a respeito da sistematização musical, de conceitos ou terminologias, nos traz noções de música para a modernidade, sempre dando o valor devido aos mestres que tiveram o dom de criar e sistematizar o universo da música.

Bohumil Med e Wisnik têm nos seus livros, um compendie teórico-prático, muito simples, agradável e de fácil entendimento, condizentes com a pesquisa, para as definições sistemáticas da música, vamos aqui descrever “o básico” do rico universo da Música, em suas características, definições e algumas particularidades.

⁷ Uma definição bem atual em relação a “música”, baseado no trabalho de Fred Dantas; **Teoria e Leitura da Música para as Filarmônicas**, Paginas 14 até 20.

4.2.1 Qualidades do som e os elementos da música.

Nessa abertura das definições da música, vamos começar pelas qualidades do som, embora esses fundamentos quando elevados á música, tem sempre qualidades preparadas e elaboradas.

- Duração do som; geralmente classificamos como longo ou curto,

A partir da duração relativa do som, podemos organizar esta qualidade em uma sequência de sons, numa repetição, que por sua vez, produzira “ritmo”. A duração em que o som é articulado (curto ou longo) e pode ser medido por pulsação, sequência, ordenação, repetições.

Ritmo é uma palavra de origem grega “Rhytmos”, que pressupõe um movimento regulado, designado o que se move em repetição, costumeiramente nos tempos da antiguidade, eram feito ligações de termos ou idéias novas com o corpo humano, onde os movimentos repetitivos do coração, do pulso, da respiração, deram origem ao termo.

Quando é subordinado a durações com as variações e movimentos medidos, é chamada métrica.

A escala musical foi desenvolvida em uma divisão de valores que facilitam o entendimento e a leitura do compasso na pauta, uma simbologia que vai determinar a duração do som a ser produzido ou do silêncio a ser respeitado dentro da execução musical.

Utilizando claramente fórmulas matemáticas, vamos multiplicar o valor principal (semibreve) por 2 e conseqüentemente encontramos o diagrama dos valores da divisão binária:

Um quadro de valores melhoram o entendimento matemático;

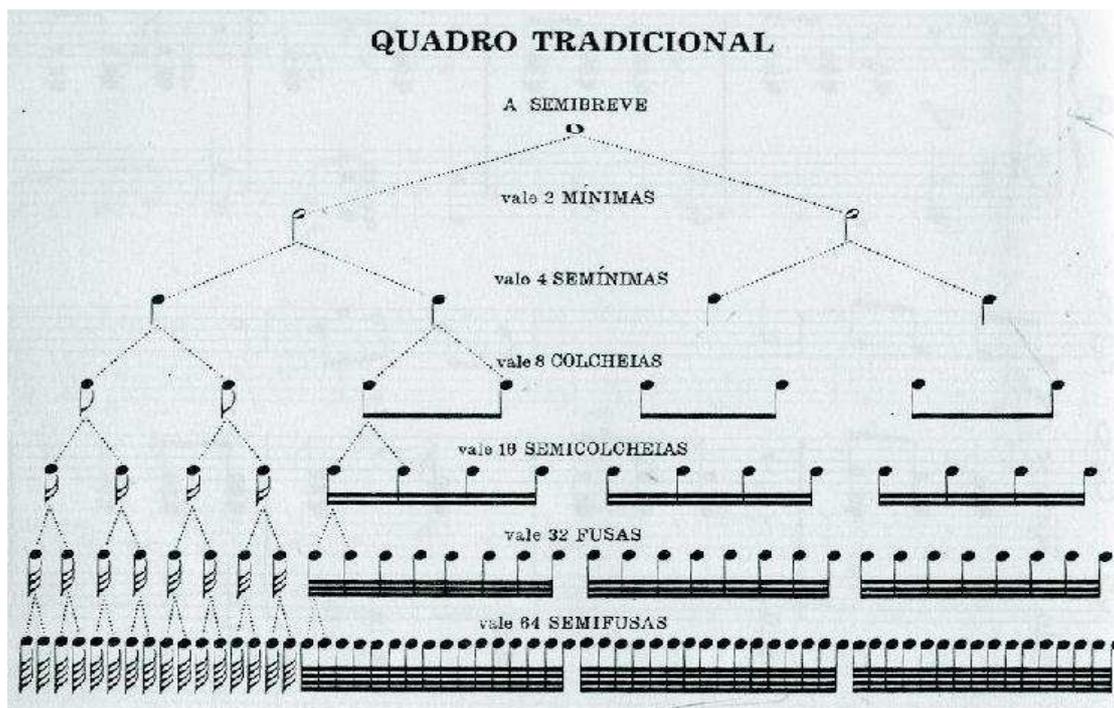


Fig. 1 - Fonte: DANTAS. p. 50,

A leitura como assim conhecemos da música em partituras, depende intrinsecamente do estudo contínuo, tornando-se uma linguagem própria no fato de que no olhar já se conhece o valor, o andamento e como tocar.

Uma língua própria que naturalmente desenvolve-se com a prática constante, encontramos também além dos valores das notas, os valores de silêncio, que em proporção a nota tocada, deve-se manter o intervalo em silêncio.

Para indicar a duração relativa do som, esses valores são conhecidos como; *positivo* quando indicam o som a ser produzido, e *negativo* quando indicam o silêncio. Sendo suscrito nas figuras e nas pausas, estas são as mais comumente usadas;

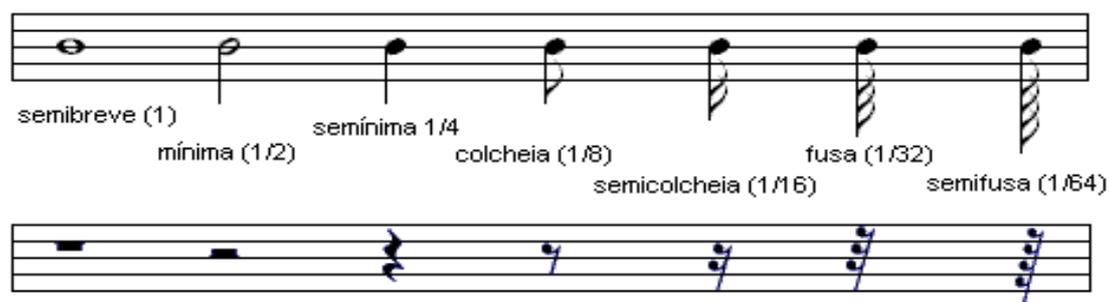
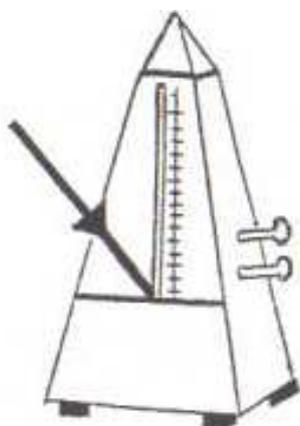


Fig. 2 - Fonte: DANTAS. p. 50,

- Andamento; refere-se a pulsação (pulsações) de rápido á lento.

O andamento organiza o ritmo e determina a execução no tempo/espço, é determinado pelo metrônomo, um instrumento que detém seu índice de velocidade, pode ser um que foi inventado no Século XIX, mas importante nesta pesquisa, para fins de complementar o entendimento de como se exprime a execução da música no seu andamento.

Nesta classificação de variação do andamento, os andamentos lentos variam de 40 á 66 vezes por minuto, os médios de 60 á 120 semínimas por minuto e os rápidos e 120 á 208 vezes por minuto.



Metrônomo - FONTE: MED. p. 130. 1996.

Inventado por Johann Nepomuk Maelzel (alemão), tem por base a semínima sendo executada 100 vezes por minuto, podendo variar em andamento lento, médio e rápido, com variações muitas vezes dentro de uma mesma obra.

Esta sistematização musical que teve seu início no período de Pitágoras, foi desenvolvida buscando um ideal de vida, uma harmonização social e espiritual, e foi graças a esse trabalho de pesquisa e discussões que temos a Música nesta riqueza e detalhes.

Alguns pitagóricos tiveram destaque nessa organização musical, quero mencionar aqui os mais interessantes no ponto de vista da ousadia de mudar ou classificar, a música até então era um campo desconhecido ou talvez divino, onde as mudanças eram desafiadoras, pois acreditava que os “deuses” poderiam irritar com tal desrespeito, Filolau e Arqúitas tiveram esta ousadia e daremos lugar de honras em nosso destaque.

Em um período onde os “deuses” dominavam a mente da humanidade, e a busca por agradar era a essência da vida, regidos por misticismo, mágicos, feiticeiros, curandeiros e diversos personagens relacionados a “seres” superiores, a música foi usada como meio de liderança superior, “nos primitivos, um dos símbolos mágicos mais fortes sempre foi à música, dando-lhes esta idéia da harmonia como ordem, de arbitrariedade, e do grande milagre que é o cosmos, sob cujo domínio se desenrola toda sua vida mágica e misteriosa”. (ZANDER; 2003, p. 30).

- Compasso; determina a quantidade de tempo ou pulsação que haverá, e qual a unidade de tempo dentro de cada compasso e seu número determinado a unidade de tempo e a unidade de compasso.

Com a característica que pressupõe a divisão de um trecho da música separada por uma barra vertical, acompanhada no início da música pela métrica do

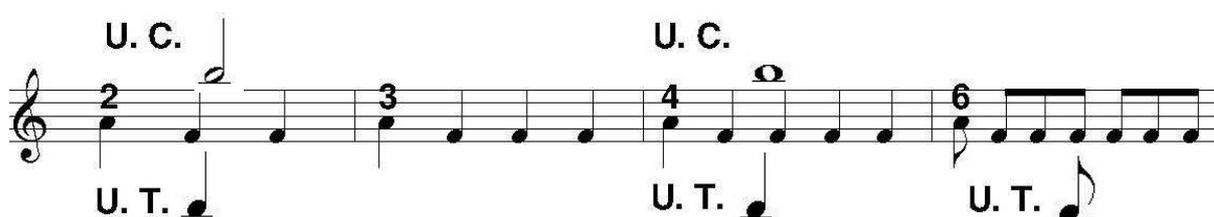
compasso, em forma de fração onde o numerador indica quantas figuras entram em cada compasso, e no denominador, a espécie de valores das figuras.

Esta forma de organizar o ritmo de uma música chamada de compasso, ou seja, a maneira de contar duração dos diversos grupos de sons, e estabelecer como será estruturada ritmicamente a música, pois facilita a leitura da música, independente da época em que a música será executada e qual estilo é a música, qualquer músico ao ler a partitura, saberá executá-la.

A métrica de compasso é dividida em compasso binário, ternário e os quaternários. O mais comum em nossos dias é o quaternário, em 4/4, bem mais popular que os ternários 3/4, e os binários 2/4, também temos ainda outras divisões de compasso que são utilizadas para variar os swings das músicas, como 6/8, 12/8, 5/4 e 7/8.

O preenchimento do compasso se dá pela unidade de compasso, ou seja, o valor que preenche sozinho um compasso, com base na unidade de tempo, que é o valor da unidade de pulsação.

Um exemplo dos preenchimentos de compasso mais conhecidos e usados no cotidiano;



Unidades de Compasso – **U.C.**

Unidade de Tempo – **U.T.**

Fig. 3 - FONTE: MED. p. 80. 1996.

A música no seu universo de definições e de diversidade teórica, possuem ainda outros elementos fundamentais para o entendimento musical.

- Altura; Exemplo: se o som é grave ou agudo em suas vibrações diferentes.

- Intensidade; em relação ao volume do som, que nos permite reconhecer a força com que o som foi produzido.

- Melodia; alturas sucessivas, ou seja, aqueles que são tocados um após o outro.

- Timbre; é a percepção da fonte sonora, tipos de instrumentos diferentes que produzem som (a orquestra), e voz (diferentes nas pessoas).

- Harmonia; Sons tocados simultaneamente.

4.2.2 Altura.

Pitágoras, como já vemos, utilizou intervalos de quinta perfeitas para obter notas na construção da escala musical, fez suas experiências em um instrumento chamado por ele de monocórdio, que é composto de uma única corda, estendida entre dois cavaletes fixos, sobre uma mesa de madeira, possuindo ainda um cavalete móvel de madeira, que era pressionado sobre a corda, na medida em que se desejasse para emitir o som. Os cálculos eram buscados por frações ou como conhecemos hoje pela razão de números inteiros.

Deste modo então se iniciou historicamente, a preparação do “som”, a elevar, afinar, a condição de uma escala musical, a “afinação” do som é definido como “altura”.

Pitágoras observou em seu experimento que pressionando a corda em uma razão de $1/2$, se obtinha o som uma oitava acima do original, pressionando em $3/4$, ouvia-se uma quarta do som original, em $2/3$ da distancia original se ouvia uma quinta acima. “Foi através de experiências com sons do monocórdio, que Pitágoras teria chegado à concepção de que todas as coisas são números, dando origem ao quarto ramo da matemática: a música.”⁸

As descobertas da relação em frações dos números aplicadas nos tons musicais foram impressionantes na época, a relação da matemática e a música se estabeleceram perfeita, mas claramente a música precisava evoluir e neste trajeto de desenvolvimento, vale ressaltar a participação de um pitagórico, Arquitas de Tarento, governante justo e moderado, acreditava na força do trabalho e na eficácia dos números, soube se utilizar desse conhecimento em situações de guerra, pois nunca foi derrotado em batalha.

O tempo nos trouxe um prejuízo quando se trata de registros históricos, pois encontramos pouquíssimos relatos sobre Arquitas, apenas que foi um dos principais responsáveis por mudanças no campo da música,

Como tradição dos pitagóricos, Arquitas mantinha a aritmética sob a geometria, porem com menos vinculo religioso, escreveu sobre a música, sendo o responsável por algumas conjecturas a respeito do som e da acustica, tendo como legado o termo “média harmônica” relacionado a subcontraria á música.

A classificação de graus em que esta dividida a escala musical que usamos até hoje vem deste período, a partir do modelo Dó M (natural) construímos as demais escalas diatônicas;

⁸ Disponível em: <http://www.rededuc.com/page_34.html>

I grau - tônica
II grau - supertônica
III grau - mediante
IV grau - subdominante
V grau - dominante
VI grau - superdominante
VII grau – sensível
VIII grau - tônica (8a. acima)

Fonte: MED. p. 66. 1996

As notas musicais possuem um intervalo entre elas conhecido como semitom ou meio tom, que é a menor distância adotada na música ocidental, existem outras classificações de intervalos na música oriental, porém, pouco utilizadas.

A soma de dois semitons é chamada de tom, na escala de Dó, por exemplo, encontramos dois semitons naturais apenas, variando em quantidade dependendo da nota de base em que queremos executar.

A escala musical se desenvolveu ao longo do tempo e em diversos povos, porém as mudanças significativas perduram dos gregos em seu épico momento filosófico, primeiro foi desenvolvido o tetracorde, que são escalas de quatro tons, com participação decisiva e quase que exclusiva dos pitagóricos⁹, depois veio as escalas de sete tons.

A escala Pentatônica, que está delimitada em um território que é de uma *oitava*, que é o primeiro intervalo, já o segundo intervalo é a *quinta* que sucede a *oitava*, daí o dinamismo da escala conhecida como Pentatônica, ou seja, escala de cinco notas. Uma escala gerada por uma série de quintas, onde se pegamos a nota

⁹ Detalhe de essa definição escalar e como foram determinadas estas frequências pelos Pitagóricos, no próximo subtítulo.

Fá como referencia teremos; fá, dó, sol, ré, lá, onde colocando em ordem escalar, termos então, fá, sol, lá, dó e ré.



Fig. 4 - Fonte: WISNIK, p. 74. 2005.

O que vemos na escala pentatônica é que a progressão é interrompida na quinta nota, onde é considerada suficiente em alguns conjuntos escalares, mas em outras ainda se prossegue até a sétima nota, a escala heptatônica, considerado como limite.

O problema esta em que uma nova nota no caso o *mi* que é a quinta de superior de *lá*, causa um encontro com a nota *fá*, sem espaço suficiente para tornar agradável ao ouvido numa escala separada por um grau completo, a nota *sí* que é a sétima nota, também tem o mesmo problema de distância em relação a nota *dó*.

Esses intervalos menores são chamados de semitons, apesar de preencher os espaços deixados pela escala pentatônica, a escala de sete notas, possuem intervalos menores e desiguais, causando problemas na perfeição da ordem do som, por isso a resistência em algumas culturas em adotar esta escala.

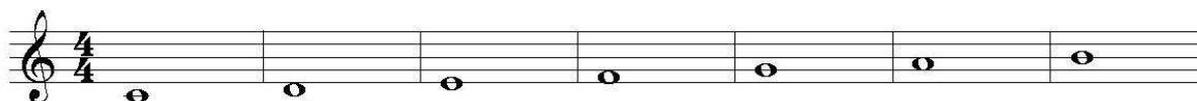


Fig. 5 - Fonte: WISNIK, p. 81. 2005.

Para facilitar a transcrição musical, foi criado a pauta musical ou pentagrama, que no grego significa; penta = cinco, grama = linha, onde para que fosse dado o nome de notas as linhas da pauta, um sinal é colocado na extremidade esquerda da pauta, chamado de clave, é que fixa o nome de uma determinada altura.



Fig. 6 - FONTE: MED, p. 14. 1996.

A melodia - a sucessão de notas diferentes e consecutivas, conhecido como escala musical, possui varias classificações, dependendo da região, do estilo em que se busca musicalmente, da intenção do musico, como já citamos acima, as mais comuns são, a pentatônica e a diatônica (escalas de tons diferentes), utilizando os intervalos de semitons, teremos então 12 notas, que é chamado de escala cromática.

A harmonia - a sucessão de notas pela designação que compõem a escala diatônica ou natural considera, a primeira nota como 1º grau, a segunda nota como 2º grau, e assim sucessivamente, o primeiro grau conhecido como Tônica, normalmente é o centro da escala, ou seja, é ela que da a tonalidade da escala,

onde a interdependência dos demais graus classifica as notas dentro de um determinado tom.

Traçando uma linha dentro de uma tabela, vamos aproveitar o tom de Dó maior como base para nossa demonstração, já com os intervalos classificados em suas razões, os graus com seus nomes respectivos, a simbologia utilizada em cada grau, e a nota correspondente, com a razão de fração desenvolvida pelos pitagóricos, temos a escala completa utilizada normalmente em nossos dias, a escala de 12 notas, com os intervalos em semitons:

ESCALA CROMÁTICA DE DÓ MAIOR												
GRAUS	DÓ	RÉ ^b	RÉ	Mi ^b	MI	FÁ	SOL ^b	SOL	SOL#	LÁ	Si ^b	SI
GRAUS	I	-	II	-	III	IV	-	V	-	VI	-	VII
NOME DOS GRAUS	TÔNICA	SEGUNDA MENOR	SEGUNDA MAIOR	TERÇA MENOR	TERÇA MAIOR	QUARTA JUSTA	QUINTA DIMINUTA	QUINTA JUSTA	QUINTA AUMENTADA	SEXTA JUSTA	SÉTIMA MENOR	SÉTIMA MAIOR
SÍMBOLOS	T	2m	2M	3m	3M	4J	5 ^o	5J	5+	6M	7m	7M
Razão	1		9/8		81/64	4/3		3/2		27/16		243/128

Tabela 1 - Fonte: MED. (Adaptação) p. 41-66. 1996.

Nesta ramificação de sonoridade, encontramos também além das escalas, que são tocadas sucessivamente, há também as notas tocadas simultaneamente, chamadas de acordes, geralmente formados por três ou mais sons.

O mais comum é o acorde formado de três sons (tríade), obtido com a tônica, o terceiro grau e o quinto grau, chamado acorde perfeito maior (Dó, Mi, Sol), assim sucessivamente, ao II grau da escala formamos o acorde com (II, IV, VI), pelo intervalo com os três sons, vamos obter o acorde perfeito menor, pois a terça é menor (Ré, Fa, Lá), partindo do terceiro grau, temos um acorde perfeito Maior (Mi, Sol, Si), a partir do quarto grau também será perfeito Maior (Fá, Lá, Dó), iniciando no quinto grau então temos um acorde perfeito Maior (Sol, Si, Ré), No sexto grau partindo na mesma regra das tríades temos um acorde perfeito menor (Lá, Dó, Mi), e por fim do sétimo grau encontramos um acorde diminuto (Si, Ré, Fá) onde todos os intervalos são de três semitons.

Acordes na escala Maior (Dó Maior)

PM Pm Pm PM PM Pm 5ª Dim
 1º 2º 3º 4º 5º 6º 7º

Fig. 7 - Fonte: MED. p. 175. 1996.

A diversidade de acorde se deve a cálculos matemáticos, onde cabe ao músico o desenvolvimento prático e a habilidade de conhecer e utilizar dentro de uma música qualquer, ainda nas tríades tem os acordes na escala menor, que parte do princípio de ter sempre a terça menor.

Por exemplo, na escala em que utilizamos a tônica Dó, então o acorde recebera o nome de Dó.

Acrescentando mais um intervalo de 3ª teremos acordes de 4 sons (tétrades), mais um intervalo de 3º teremos o acorde de 5 sons, etc.

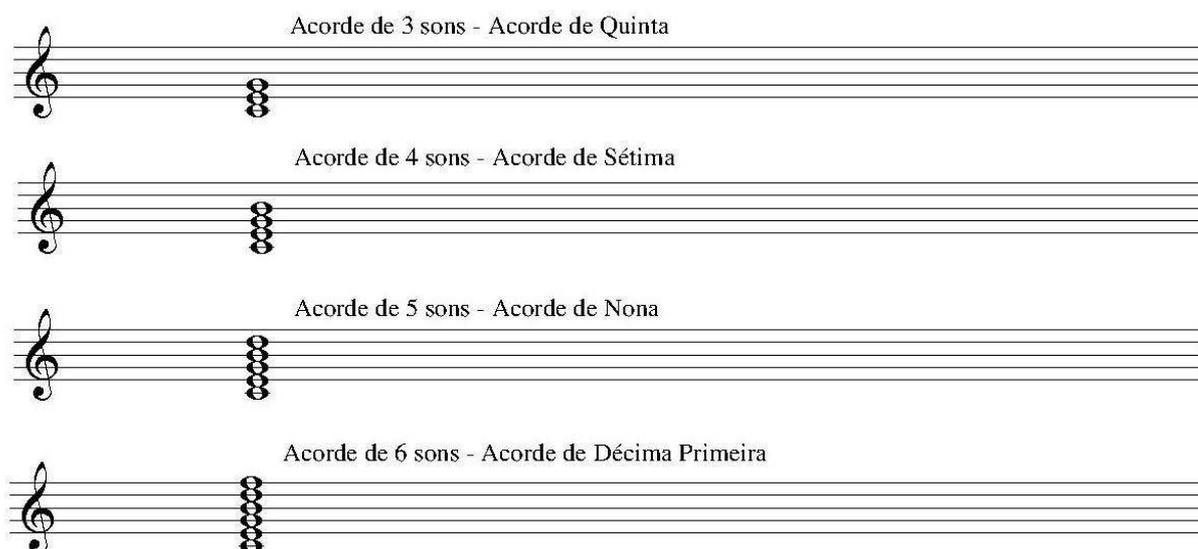


Fig. 8 - Fonte: MED. p. 172. 1996.

Estas classificações foram ganhando o formato que utilizamos hoje, com o tempo, e as adaptações, surgiram quando exigidas pela complexidade do contexto da Música, mas é importante lembrar que o grande legado deixado principalmente pelos pitagóricos, foram significativos para o formato de como conhecemos a Música hoje.

O pitagórico Arquitas como um dos principais colaborador deste legado, foi amigo e influenciou significativamente Platão nesta continuidade, que em sua escola Platônica, escreveu vários “diálogos”, e ficou conhecido por buscar uma sociedade harmônica, perfeita, natural e imutável tanto no moral como no social, teve uma significativa importância na evolução da Música como disciplina lógica, por exigir em sua escola que todo matemático fosse também músico.

4.3 Platão

Platão partiu do princípio de que existem dois mundos, englobando todos e tudo, o mundo das idéias e o mundo do sentido, as idéias são imutáveis, imortais no mundo físico, o mundo dos sentidos é o mundo real em que vivemos, nas suas imperfeições, portanto não eternas.

Sendo assim, Platão buscava um mundo de perfeição, onde a confiança na idéia imutável deveria ser reconhecida na razão como pilastra da sociedade, tirando as imperfeições das informações que nos chegam através do sentido imperfeito, pois varia de individuo para individuo.

Platão no seu escrito *A república* num discurso de equilíbrio social, deixa claro a harmonia musical relacionada com a harmonia da cidade ou do individuo.

Nesse ponto, ao supor uma ordem (social e musical) dada, que não deve senão reproduzir-se como tal, e ao afirmar o lugar estratégico da música na manutenção dessa ordem que busca permanecer imune a toda crise e toda transformação, o texto platônico lembra o do sábio chinês: [...] nunca se abala os gêneros musicais sem abalar as mais altas leis da cidade. (WISNIK, P. 101. 2005)

A aceitação de que a música regia o social que por sua vez dependia do individuo como sendo justo ou não, Platão foi enfático no ensino da música como busca da perfeição. Dai talvez a afinidade de Platão com a matemática por ser objetiva não dependendo do senso critico, mas da razão para o entendimento.

Defendia que o homem era constituído de alma e corpo, onde a alma representa a sede por uma razão, e o corpo físico ligado ao sensorial imperfeito e suscetível a falhas. A música tornava o homem justo por cuidar da personalidade da alma que é imutável.

Platão foi muito importante na disseminação do ensino musical como regra de conhecimento educacional e cultural.

4.4 Aristóteles

Aristóteles na sua coleção escreveu-nos a respeito da ética e do comportamento humano, em vários momentos frisou a qualidade das virtudes do homem, onde não são as paixões que movem esta, nem mesmo as faculdades mentais (razão), mas sim as conseqüências da paixão e da razão, que promovem o homem a ser ou tomar as atitudes virtuosamente boas ou ruins, “Se, então, as virtudes não são paixões nem faculdades, só podem ser disposições.” (GUIMARÃES, p. 43. 2010)

Para executar uma tarefa com perfeição é necessário que seja praticada varias vezes, ser estimulada através de mestres que irão conduzir pelo caminho da perfeição, em nosso trabalho, pra ser um bom musico, é necessário a pratica da musica com supervisão de mestres, pra ser um bom professor, é necessário a pratica do educar, enfim, Aristóteles nos da o caminho para nos tornarmos bom em nossas virtudes.

Para Aristóteles a música tem o papel de aprimorar as qualidades do homem sociável, os tornando justos e bons, tecnicamente pouco colaborou com a música propriamente dita, mais, sua maior contribuição foi na discussão do papel da música, regras especificas na utilização da musica no currículo escolar, sua importância na humanidade, tudo isso Aristóteles foi extremamente facilitador na divulgação através dos seus escritos.

5 A COMUNHÃO DAS ARTES

5.1 Busca por conhecimento

Paralelamente ao desenvolvimento da matemática, a música surgiu acompanhando a velocidade de crescimento da matemática. Logo foi observada sua importância no intelecto, na criatividade do homem como ser humano e social. Relações nas citações de Zander que, “entre os chineses, a música estava sob inspeção e proteção do Estado. Seu conhecimento e domínio era recomendado por Confúcio como o melhor fundamento para sabedoria dos chefes de Estado em sua administração”. (ZANDER, 2003, p. 31).

Em vários povos encontramos a música como coluna no que diz respeito ao controle da sociedade, político e também no sistema educacional, na Grécia considerada o berço da humanidade em relação ao conhecimento, a música teve seu papel considerável, “era, portanto, parte importante da educação do homem grego, e desde tempos remotos”.¹⁰

Observamos que, a linha histórica do desenvolvimento da matemática grega, no período entre os séculos VI e III a.C., os personagens em pauta e as escolas por eles fundadas, hoje tradicionalmente conhecidas como; os pitagóricos, a escola fundada por Platão e mais adiante a escola de Aristóteles, com papéis importantíssimos no universo da matemática, em estabelecer teoremas, discutir sobre fórmulas, sistemas, registrar nas referências da história seus nomes, conquistas e descobertas.

¹⁰ Disponível em: <<http://greciantiga.org/arquivo.asp?num=0719>>

Vemos que a filosofia que era basicamente a pilastra mestre a todas as ciências da época, e que todo desenvolvimento matemático veio acompanhado da harmonia musical, as definições, as divisões, tudo isso teve um progresso extraordinário no período grego.

Os pitagóricos, Platão e Aristóteles, e alguns outros nomes históricos como Arquitas de Tarento, defendiam que o conhecimento e habilidade na música, era determinante no currículo para ser considerado mestre ou sábio neste período, ou seja, do século VI ao século III a.C.

A pessoa que compreende e manuseia a simbologia matemática freqüentemente é considerada gênio; fórmulas e símbolos matemáticos são coisas complicadas, difíceis e indecifráveis para a maioria das pessoas. Mas isto não acontece apenas com os códigos usados pela Matemática. Uma partitura musical, por exemplo, é complicada e indecifrável para quem não a conhece. Entretanto, uma pessoa que se dedique a estudar música aprenderá a decifrar seus códigos. O mesmo se passa com a simbologia usada pela matemática: com algum esforço é possível compreendê-la.¹¹

A complexidade de símbolos em que temos hoje, não destaca a genialidade dos criadores ou desenvolvedores da música, onde cálculos “milimétricos” de frequências e distâncias, determinaram as escalas e compassos atuais, Zander destaca também que tudo estava ligado a uma dimensão maior, um mundo diferente, harmonioso.

Arquitas em seus escritos deu considerável atenção ao papel da matemática na educação e no aprendizado, estudiosos lhe atribuem o chamado *quadrivium* matemático, era considerado como o principal conhecimento necessário para preparar o indivíduo, “Arquitas deu mais atenção á música que seus

¹¹ (Disponível em: <http://educar.sc.usp.br/matematica/m2l1.htm>. (Acesso 15/02/2011))

antecessores, e achava que ela devia ter um papel mais importante que a literatura na educação das crianças.” (BOYER, 2003, p.49).

O misticismo pitagórico foi impressionante, chegaram à conclusão que tudo era números, atribuíram significados que para nossos dias nos parecem lógicos, por exemplo, o conhecido como “número quaternário”, a adição dos números: $1+2+3+4 = 10$, os pitagóricos acreditavam que os números eram o fundamento das coisas, até mesmo a harmonia do universo, das coisas palpáveis e as não palpáveis, as proporções, os parâmetros congruentes da natureza, tudo era compreendido através da matemática, “a idéia de modulação métrica parte do pressuposto de que existe uma proporção matemática entre figuras rítmicas de andamentos musicais diferentes.” (FREIRE, p. 2. 2011).

A música tem um papel importante no desenvolvimento do ser social e cultural, facilita a compreensão da criança, desenvolve seu senso de criatividade e desperta para curiosidades.

A música que chega ao ouvido desses alunos é de suma importância para a prática de nossa proposta. Desde o gospel até o rap, esses ritmos podem e devem ser explorados por eles, pois sabemos das possibilidades abertas pela leitura e pela criação de textos que envolvem as quatro operações matemáticas. (OLIVEIRA, *In* Revista Recursos, 2009, p. 41)

Analisando e pesquisando o que os grandes escritores estudiosos nos têm a dizer sobre a relação da matemática em conjunto com a música, espero no final ter contribuído pra nosso crescimento do saber, despertar o interesse por utilizar outros métodos que no passado teve primordial importância no ensino, principalmente da matemática.

5.2 Currículo musical.

A música no seu desenvolvimento curricular teve seu destaque a partir do século VI a.C., em especial na civilização grega, encontramos os primeiros indícios de organização e sistematização e de elevação da música como contexto de cálculos, formulas através de Pitágoras e sua ordem, os pitagóricos.

Questionando a busca pelo poder e por prazeres, Platão nos seus escritos, destacou a pesquisa histórica e a busca por conhecimento, a idéia de que o homem deveria esta sempre em busca da perfeição, no aprimoramento da alma, porém em contato com o mundo físico, a idéia de perfeição se corrompe, então estabeleceu regras e fórmulas para essa busca de um mundo perfeito, aproveitando-se da matemática pela sua razão não pendente ao mundo sensorial e utilizando da harmonia moldável da música para estimular o crescimento do ser humano.

Na escola Platônica, a educação foi baseada na razão, a busca pela perfeição que só pode ser percebida pela mente, e não no mundo físico sensível as mudanças.

Os reflexos da alma eram percebidos no sistema de governo pelas atitudes, então Platão sustentava que se moldássemos a alma do homem, saberíamos conduzir a sociedade para um mundo perfeito, pois a justiça se expressa pela personalidade da alma, que é a harmonia das virtudes das estruturas da sociedade.

5.3 Educação “perfeita”

Os gregos foram os responsáveis por um estudo racional, questionando a política e os interesses pessoais, destacando-se por uma sociedade culturalmente evoluída e de nível superior em relação às outras civilizações.

Vale à pena analisarmos a utilização dos conceitos nos sistemas educacionais da época Platônica, Aristotélica, bem como também em dias atuais, que a busca por harmonia das virtudes da alma, pode trazer justiça e nos aproximarmos da sociedade perfeita, “Educação: instrumento e meio mais importante que ira definir a posição da justiça, assim como da injustiça, dentro do Estado. Elemento indispensável para tornar os habitantes de uma cidade em cidadãos.” (CIENTEFICO, p. 32, 2002).

Diversidade nas maneiras de ensinar matemática pode ser estimulada também através da música, na construção da escala musica, usando cálculos com frações ou como razão de números inteiros.

Podemos realizar experiências práticas com instrumento de corda, demonstrando de uma maneira divertida as frações.

Nos múltiplos de 2, encontramos a facilidade de contar os valores das notas musicais, a divisão proporcional da semibreve, mínima semínima, colcheia, semicolcheia e fusa, identificamos andamento em que os sons devem ser produzidos, o tempo da música, o ritmo se intensifica ficando claro e coeso usando as batidas certas da potenciação.

Usando de maneira alegre e divertida, podemos trabalhar multiplicando por dois (2) os tempos das notas ou das pausas de silencio, vamos descobrir os vários estilos e andamentos das músicas.

Uma potenciação, uma progressão, há varias maneiras criativas de se utilizar os valores das notas musicais para ensinar matemática, uma rima rítmica, uma trilha de Rap, um dinamismo prático e divertido.

Valor	1	* 2					
Semibreve		2	4	8	16	32	64
Mínima			2	4	8	16	32
Semínima				2	4	8	16
Colcheia					2	4	8
Semicolcheia						2	4
Fusa							2

Tabela 2 - Fonte: DANTAS. p. 50,

Nos compassos percorridos em uma pauta qualquer, as divisões, binárias, ternárias e quaternárias, se tornam agradáveis e palpáveis no diagrama da potenciação, onde o preenchimento do compasso é obrigatório e de acordo com o valor usado, demonstramos as frações a partir de um valor primeiro, a semibreve.

No estudo da escala musical moderna, encontramos os chamados graus de intervalo, que usando a nota dó como base, se divide em sete graus, com diversas formas de demonstrações das escalas musicais, podemos trabalhar com a harmonia do som agradável aos ouvidos, comparando com as frações e razão em que estão constituídas.

Na formação das escalas musicais, podemos deduzir regras e se desejarmos um nível superior de ensino, podemos entrar no campo da acústica, das freqüências dos sons, daí usarmos derivadas, logaritmos e dentro do cálculo como matemática pura, ainda pode se buscar as derivações nos limites.

Vemos então que os caminhos são imensos e dependem do interesse e da capacidade do educador formador do individuo, o limite do universo matemático dentro da música tende ao infinito.

5.4 A música como regra

Tal a importância da música em algumas civilizações de destaque e de tradição no nosso mundo, que utilizam a música como regra de justiça e de organização.

Na visão chinesa da interpretação da música no seu modelo político e social, tal concepção é dada por, a música na sua escala tem o significado da ordem social equilibrada nos sons distintos claros ou fortes e poderosos, assim a tradição contribui para o funcionamento mutável de um todo imutável, sem perturbação do equilíbrio.

Na Índia, apesar da eficácia ser menor, também trabalha com regimentos baseados na escala musical em certas aldeias, comparadas a maneira chinesa de governar, onde a chefia é semelhante a nota fundamental, que trama com as outras notas como apoio e como antagonismo político.

Apesar de vemos a música num papel privilegiado, percebemos que há um caráter problemático envolvendo a música no âmbito da harmonia ideal, Platão

em A república, Aristóteles em seus escritos, discutem longamente o papel político-pedagógico da prática musical, buscando estabelecer um ideal para a música correta que estabeleça a ordem pública, uma estrutura para “criar” cidadãos, como base da educação.

Por isso mesmo, ela é um elemento decisivo no plano político-pedagógico, e a metafísica de que esta investida corresponde a uma ética: a harmonia escalar contém um caráter cujo alcance mimético é irradiador; trata-se de triar as escalas de maneira a fazer com que aquelas que estão imbuídas de um caráter “elevado” e cívico prevaleçam sobre aquelas outras que, consideradas dissolventes e pouco viris, não contribuem positivamente para a formação do cidadão. (WISNIK, p. 102. 2005).

Na otimização da educação, a evolução em que tivemos na maneira de como ensinar a matemática, sua aplicação logística, a profundidade da aritmética, se aliada com a experiência dos conceitos respeitáveis dos sábios gregos, somaríamos em um mundo imperfeito, a razão imutável da matemática com o equilíbrio harmônico da música, uma integração de mundos, hipótese e tese, uma congruência perfeita.

Podemos não ter êxito na busca da perfeição do homem como ser humano, porém, o que percebemos nesta pesquisa é que o foco de educar e moldar o homem, passa pela bela arte harmonia dos números.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

É notável e conhecida a precedência dos Egípcios nas questões geométricas da matemática dos tempos antigos. Suas operações consideradas hoje como básicas, são a estrutura mestra de qualquer cálculo moderno. “A operação aritmética fundamental no Egito era a adição, e nossas operações de multiplicação e divisão eram efetuadas no tempo de Ahmes por sucessivas “duplações”.” (BOYER, p.10. 2003), o Egito foi o ninho mais elaborado para essa grande “ave” da matemática nascer: “Podemos afirmar, com absoluta certeza, que a matemática egípcia foi um dos pilares da matemática grega, a qual foi à base para a nossa matemática moderna.”¹² Porém, foram os gregos que aprofundaram e disseminaram a ideologia da Matemática como uma das principais ciências da humanidade no que diz respeito ao conhecimento e a garantia da sobrevivência como espécie dominante.

A escola Pitagórica é uma ideologia de respeito e exaltação, deve ser apresentada como exemplo de determinação, postura de vida e alvo definido. Boyer comentou que “definições antiquadas da matemática como uma “ciência do número e grandeza” já não são válidas; mas sugerem as origens dos diversos ramos da matemática”. (BOYER. p.1. 1996), não cabem na realidade que se moldou essa arte e seus diversos ramos e aplicações, mas ainda são expressas em nossos dias.

Platão em suas dialéticas, na teoria das Ideias, que é no âmbito geral a nomeação de alguns ou muitos objetos que participam dela, que compartilham da mesma *forma*, coexistindo simultaneamente com a *ideia* da mesma coisa, mas que não são únicas. Para convergir tudo isso, vamos colocar assim, uma árvore tem a

¹² Disponível em: <<http://www.somatematica.com.br/historia./antiguidade>> .

ideia de que é árvore, outra árvore tem a ideia de que é árvore, embora seja totalmente diferentes na forma uma da outra, ambas são árvores porque compartilham da mesma ideia. O que diferencia os pitagóricos é que estes diziam só aquilo que se pode determinar numericamente é que existe de maneira real.

Aristóteles foi enfático nas dialéticas que teve, ao discordar em alguns exageros de Platão, mas acreditava que a ordem social depende do cidadão formado, em que as virtudes são a consequência do que se tem praticado. Nesse ponto de vista, vemos a música como um coeso indício de formação social, podendo ser utilizada sim como currículo básico na formação do indivíduo. Wisnik vai além e escreve que a harmonia musical tem a capacidade de potencializar virtudes e de infundir ânimo.

Concebida como o próprio elemento regulador do equilíbrio cósmico que se realiza no equilíbrio social, a música é ambivalentemente um poder agregador, centrípeto, de grande utilidade pedagógica na formação do cidadão adequado à harmonia da *polis* e, ao mesmo tempo, um poder dissolvente, desagregador, centrífugo, capaz de pôr a perder a ordem social. (WISNIK, p. 102. 2005).

Nas escalas musicais muitos intervalos são possíveis, sistemas modais podem ser criados, maneiras diferentes de distribuição de intervalos conforme as notas a serem tomadas, preponderâncias diatônicas, porém os resultados podem ser agradáveis ou esquisitos aos nossos ouvidos.

Na criação do indivíduo social também podemos diversificar os moldes da formação, cabe escolhermos a maneira.

O governo tem demonstrado compreensão a respeito da música no currículo escolar. Na disciplina de arte, já há uma lei que corrobora com o ensino obrigatório da música¹³.

Nós, sabedores da importância da música na constituição intelectual do indivíduo, devemos trabalhar para que, depois de estudo e discussões adequadas com uma estrutura baseada em pesquisas, essa lei se estenda a uma matéria curricular específica no campo das exatas, num ramo da matemática, a música.

A harmonia, que por natureza de espírito o homem busca, também é responsabilidade do educador e cidadão sendo parte majoritária na formação do indivíduo, trabalhar com a formação intelectual da criança, mostrar a consequência da soma, vontades (as paixões), com a capacidade de realizar (faculdades), da razão (os meios) de como realizar, buscando através da prática do que é bom potencializar as virtudes justas e autênticas do caráter humano.

¹³ Disponível em: <<http://www.arte.seed.pr.gov.br/modules/noticias/article.php?storvid=232>> Lei 11.769/08,

REFERÊNCIAS

A música na Grécia: disponível em: <http://greciantiga.org/arquivo.asp?num=0719> (Acesso 15\08\2011)

A Matemática na Antiguidade: disponível em: <http://www.somatematica.com.br/historia/antiguidade.zip> (Acesso 12/11/2009).

Aristóteles. Disponível em <http://greciantiga.org/arquivo.asp?num=0422> (Acesso em 11\03\2011).

BARBOSA, Gustavo. **Platão e Aristóteles na Filosofia da Matemática.** 2010. Disponível em: http://www.dominiopublico.gov.br/pesquisa/DetalheObraForm.do?select_action=&co_obra=169767 > (Acesso em 10\03\2011).

BOYER, Carl B.. **História da Matemática;** 2º Edição. São Paulo. Edgard Blucher. 2003.

CARDOSO, Belmira. Mario Mascarenhas. **Curso completo de teoria musical e solfejo.** Volume 1º, 8ª Edição. IRMÃOS VITALE S. A. Ind. e C om. São Paulo, 1973.

CIENTEFICO, A República – Platão. Ano I, v. I, janeiro-julho. Salvador. 2002.

DANTAS, Fred. **Teoria e Leitura da Música para as Filarmônicas.** Edição Casa das Filarmônicas, Salvador, Bahia.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática;** Editora. Unicamp. 2004.

FREIRE, Ricardo Dourado, **Fundamentação teórica do uso da modulação métrica como recurso na performance musical,** *In* Anais do II Seminário Nacional de Pesquisa em Performance Musical, Universidade de Brasília. 2011. Disponível em: http://www.anppom.com.br/anais_banco.php (Acesso 18/08/2011).

GARBI, Gilberto G.. **O romance das equações algébricas.** Editora e Livraria da Física. 4ª Edição revista e ampliada, São Paulo, 2010.

GUIMARÃES, Torrieri. **Ética a Nicômaco, Aristóteles.** 5ª Reimpressão, Editora Martin Claret Ltda. São Paulo. 2010.

HISTÓRIA DA GEOMETRIA: disponível em: <http://www.somatematica.com.br/geometria.php>. (Acesso 13/09/2011).

LEI 11.769/08. Disponível em: <http://www.arte.seed.pr.gov.br/modules/noticias/article.php?storvid=232>, (Acesso 29/12/2010).

MATEMÁTICA E A MÚSICA: disponível em:
<<http://educar.sc.usp.br/matematica/m211.htm>>. (Acesso 15/02/2011).

MED, Bohumil. **Teoria da Música**. 4ª Edição, Editora Musimed. Brasília – DF. 1996.

MONTEIRO, Gizele de Assis, ARTAXO, Inês. **Ritmo e Movimento**. Phorte Editora Ltda. 2000.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes Curriculares de Matemática para as séries finais do Ensino Fundamental e Médio**. 2008, Curitiba.

PLIMPTON 322 (Universidade de Colúmbia). Disponível em:
<<http://laquesigueaquiblogspot.com/2010/06/la-tablilla-plimpton-322.html>>
(Acesso 01\08\2011).

ZANDER, Oscar; **Regência Coral**. Editora Movimento, 5ª Edição. Porto Alegre. 2003.

WISNIK, José Miguel. **O som e o Sentido**. Editora Schwarcz Ltda, São Paulo, 2005.

SUGAHARA, Leila. Música, matemática e mitologia grega. (Publicado na Revista Cenário Musical n.7 - Ed. HMP, 2007). Disponível em:
<http://www.rededuc.com/page_34.html>. (Acesso 05\10\2011).